

SÉRIE A, N° 3009

N° D'ORDRE :

3881

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

MICHEL FABRE DE LA RIPELLE

1^{re} THÈSE. — SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA MÉTHODE
DES PERTURBATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 mars 1956 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE *Président.*

G. DARMOIS..... }
LAPORTE..... } *Examineurs.*

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

—
1958



Digitized by the Internet Archive
in 2026



SÉRIE A, n° 3009

N° D'ORDRE :

3881

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

MICHEL FABRE DE LA RIPELLE

1^{re} THÈSE. — SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA MÉTHODE
DES PERTURBATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 14 mars 1956 devant la Commission d'examen.

MM. L. DE BROGLIE *Président.*

G. DARMOIS..... } *Examineurs.*
LAPORTE..... }

PARIS

MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1958



Doyen M. J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	L'HÉRITIER	T	Génétique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	GRIVET	T	Radioélectricité.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	THIERY	T	Mécanique appliquée.
JOB	T	Chimie générale.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	QUELET	T	Chimie organique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	JUNG	T	Pétrographie.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	WIEMANN	T	Chimie organ. structurale.
Jacques BOURCAUT.	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste.
PLANTEFOL	T	Botanique.	VASSY		Physique de l'atmosphère
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	DESTOUCHES	T	Théories physiques.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	M. PRUVOST	T	Géologie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	HOCART	T	Minéralogie.
WYART	T	Minéralogie.	J.-P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
TEISSIER	T	Zoologie.	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
MANGENOT	T	Biologie végétale.	MAY		Biologie animale (P.C.B.).
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité.	CHOQUET	T	Calcul diff. et intégral.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	PORTET	T	Calcul des probabilités.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	SCHWARTZ	T	Méthodes mathématiques de la Physique.
FAVARD	T	Mécanique générale.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
COULOMB	T	Physique du Globe.	MALAVARD	T	Aviation.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	BÉNARD	T	Chimie (P.C.B.).
KASTLER	T	Physique.	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.).
EPHROSSI	T	Génétique.	DUGUÉ	T	Statistiques mathématiques.
WURMSER	T	Biol. physico-chimique.	GELOSO		Chimie (S.P.C.N.).
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.).	SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	ULRICH	T	Physiologie végétale.
LUCAS	T	Physique.	MARÉCHAL	T	Optique théorique et appl.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
ARNULF	T	Optique appliquée.	CHADEFAUD		Botanique.
M. MORAND	T	Physique.	DESTRIAU		Physique (M.P.C.).
SOLEILLET	T	Physique.	M ^{lle} LE BRETON		Physiologie générale.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	SALEM		Mathématiques générales.
DANJON	T	Astronomie.	LELONG	T	Mathématiques générales.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	DEVILLERS		Anatomie et Histologie comparées.
LAPORTE	T	Physique générale et Radioactivité.	EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
JANET	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	FRANÇON		Physique (M.P.C.).
PETIT	T	Biologie maritime.	GLANCEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	GODEMENT	T	Mathématiques (M.P.C.).
GALLIEN	T	Embryologie.	PISOT	T	Calcul des probabilités.
EICHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).	E. ROCH		Géologie.
DE CUCNAC		Biologie végétale (P.C.B.).	SCHATZMANN		Astrophysique.
M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie physique.	TERMIER	T	Paléontologie stratigraphique.
HELLIER	T	Physique du Globe.	ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
			JOLIOT	T	Physique nucléaire et radioactivité.

Secrétaire Général C. MONIER.

SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE LA MÉTHODE DES PERTURBATIONS

Par MICHEL FABRE DE LA RIPELLE

INTRODUCTION

L'objet du présent travail est la recherche d'une méthode de résolution des équations de perturbation cohérente, d'une part, avec l'interprétation statistique de la mécanique quantique, d'autre part, avec les formes mathématiques des probabilités imposées par la notion d'état physique.

La première partie est consacrée à l'établissement des formes mathématiques de ces probabilités, qui traduisent l'évolution d'un système physique « isolé » au cours du temps. De tels systèmes sont, par exemple, fournis par l'évolution au cours du temps d'un noyau radioactif, ou encore, par les différents états successifs d'un atome excité retombant dans son état fondamental après émission d'un ou plusieurs photons.

Les formes mathématiques contiennent des constantes qui doivent être déterminées par les données physiques du problème.

La seconde partie du travail consiste alors à expliciter ces constantes en utilisant les équations de perturbation de Dirac, dont l'interprétation statistique conduit précisément aux probabilités d'évolution cherchées.

Un développement en série de la constante de couplage, suivi d'un regroupement adéquat des éléments de la série, permet une nouvelle définition plus générale des états stationnaires, englobant les interactions dues à l'échange de particules d'un champ en interaction avec le système, précisant simultanément l'énergie propre et le temps de vie pour chaque état, le temps de vie d'un état fondamental étant infini (pour un système isolé). Utilisant cette nouvelle définition des états stationnaires, on obtient, pour chaque amplitude de probabilité relative aux différents états possibles du système en évolution, des formes relativement simples, qui nous permettent de préciser, dans une troisième partie, les probabilités d'évolution imposées par ces amplitudes.

On montre alors que les formes physiques et mathématiques coïncident, tout au moins asymptotiquement, pour un temps suffisamment

grand vis-à-vis de celui nécessaire à la réorganisation du système après chaque transition.

L'emploi systématique de la transformation de Laplace pour les fonctions dépendant du temps (t variant de 0 à $+\infty$) simplifie considérablement les calculs et permet d'obtenir des résultats utilisant le minimum d'approximations.

CHAPITRE PREMIER

Définitions. — On appellera « état quasi stationnaire », un état d'un système isolé en évolution.

Un état stationnaire est l'état stable d'un système dont l'évolution est terminée.

Lorsque la probabilité de trouver le système dans un état donné à un certain instant est égale à 1 (elle est alors nulle pour tout autre état), nous dirons que nous avons affaire à un cas pur à cet instant. On dira que le système subit une transition dans un intervalle de temps donné s'il change d'état, une fois et une seule, dans cet intervalle de temps.

Hypothèses fondamentales. — Nous admettrons :

1° que l'on peut définir l'état d'un système à un instant donné et que le système n'existe que dans un seul état à cet instant ;

2° il existe une probabilité de trouver le système dans chacun de ses états possibles à un instant donné, connaissant son état à un instant initial t_0 antérieur ;

3° un système reste un temps fini (non nul) dans chacun de ses états successifs, ce temps devient infini, lorsque l'évolution du système est achevée.

Loi fondamentale. — Considérons un système isolé dans un état (q_0) à l'instant initial $t_0 = 0$ et cherchons la fonction $P(t)$ qui représente la probabilité pour que le système ne change pas d'état entre l'instant initial et l'instant t .

Soit t_1 un instant compris entre l'instant initial et l'instant t :

$$0 < t_1 < t,$$

décomposant l'intervalle de temps t en deux intervalles partiels $(0, t_1)$ et (t_1, t) .

La probabilité cherchée est égale à la probabilité pour que le système ne change pas d'état dans l'intervalle de temps $(0, t_1)$, multiplié par la probabilité pour qu'il ne change pas non plus d'état dans l'intervalle (t_1, t) sachant qu'il se trouve dans l'état initial à l'instant t_1 :

$$P(t) = P(t_1) \cdot P_1(t - t_1).$$

La connaissance de l'état du système à l'instant t_1 pour la détermination de $P_1(t - t_1)$ nous met dans une situation semblable à celle de la connaissance de l'état du système à l'instant initial pour la détermination $P(t_1)$, nous devons donc avoir :

$$P_1(t - t_1) \equiv P(t - t_1),$$

la probabilité $P(t)$ est solution de l'équation fonctionnelle :

$$P[t_1 + (t - t_1)] = P(t_1) \cdot P(t - t_1)$$

qui admet pour solution :

$$P(t) = Ae^{\lambda t}.$$

Les deux conditions :

$$P(0) = 1 \quad P(t) < 1$$

nous conduisent à la forme cherchée :

$$(1,1) \quad P(t) = e^{-\lambda t} \quad \lambda \geq 0,$$

λ étant une constante caractéristique de l'état initial du système. La variation $dP(t) = -e^{-\lambda t} \lambda dt$ exprime la diminution de $P(t)$ dans l'intervalle de temps $(t, t + dt)$, elle est égale (au signe près) à la probabilité pour que le système initialement dans l'état (q_0) , change d'état dans cet intervalle de temps.

On voit, en effet, qu'elle est égale au produit $e^{-\lambda t}$ de la probabilité pour que le système n'ait pas changé d'état dans l'intervalle de temps t , multiplié par la probabilité λdt pour qu'il subisse une transition dans l'intervalle $(t, t + dt)$, sachant qu'il était dans l'état (q_0) à l'instant t .

D'une manière plus générale, la probabilité, pour qu'un système se trouvant dans un certain état à un instant t_1 ne change pas d'état dans un intervalle de temps (t_1, t_2) , et subisse une transition dans l'intervalle de temps. $(t_2, t_2 + dt_2)$ a pour expression :

$$e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda dt_2$$

λ est appelé *constante de décroissance* pour l'état envisagé.

ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME

Un système se trouve à l'instant initial dans un état donné (cas pur), nous allons chercher les formes mathématiques exprimant l'évolution du système au cours du temps.

Désignons par (q_0) l'ensemble des paramètres déterminant l'état ini-

tial par (q_n) l'ensemble des paramètres caractérisant les états possibles du système lorsqu'il a subi n transitions. A chaque valeur particulière q_n correspond un état qui peut être atteint par le système, après n transitions.

La probabilité de trouver le système dans l'état q_n après passage par les états $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ sera notée :

$$P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t),$$

et la probabilité de le trouver dans l'état q_n :

$$P_{0n}(q_0, q_n; t) = \sum_{(q_1) \dots (q_{n-1})} P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n; t).$$

Considérons la première transition qui correspond au passage de l'état q_0 à l'un des états q_1 , et soit $\lambda_0(q_0, q_1)$ la constante de décroissance de cette transition si elle existait seule.

Les différentes possibilités de transition s'excluant mutuellement, la probabilité pour que le système ne change pas d'état dans l'intervalle de temps t sera le produit des probabilités pour qu'il ne subisse aucune des transitions $q_0 \rightarrow q_1$, soit :

$$(2,1) \quad P_{00}(q_0; t) = \prod_{(q_1)} e^{-\lambda_0(q_0, q_1)t} = e^{-\sum_{(q_1)} \lambda_0(q_0, q_1)t}.$$

La constante de décroissance $\lambda_0(q_0)$ de l'état q_0 est la somme des constantes relatives à toutes les transitions possibles à partir de l'état q_0 :

$$(3,1) \quad \lambda_0(q_0) = \sum_{(q_1)} \lambda_0(q_0, q_1).$$

La probabilité pour que le système change d'état dans l'intervalle $(t, t + dt)$ est :

$$-dP_{00}(t) = e^{-\lambda_0(q_0)t} \sum_{(q_1)} \lambda_0(q_0, q_1) dt,$$

ainsi :

$$e^{-\lambda_0(q_0)t} \lambda_0(q_0, q_1) dt$$

représente la probabilité pour que le système passe de l'état q_0 à l'état q_1 , dans l'intervalle $(t, t + dt)$; $\lambda(q_0, q_1)$ est une constante caractéristique des états q_0 et q_1 qui apparaît lorsque le système passe d'un état q_0 à un état q_1 , pour cette raison, nous l'appellerons constante de croissance de l'état q_1 à partir de l'état q_0 , elle est responsable de

l'accroissement de la probabilité de trouver le système dans l'état q_1 (t_1).

Pour que le système se trouve dans un état q_n à l'instant t , il faut qu'il ait subi n transitions entre l'instant initial et l'instant t ; soient $(t_1, t_1 + dt_1)$, $(t_2, t_2 + dt_2)$, ..., $(t_n, t_n + dt_n)$, les intervalles dans lesquels se sont passées ces transitions.

La probabilité pour que le système soit passé par les états $q_1, \dots, q_n$ dans ces intervalles de temps, et soit resté dans l'état q_n dans l'intervalle (t_n, t) est donnée par :

$$d^n P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t) = e^{-\lambda_0(q_0)t_1} \lambda_0(q_0, q_1) dt_1 \\ \cdot e^{-\lambda_1(q_1)(t_2 - t_1)} \lambda_1(q_1, q_2) dt_2 \dots \\ \cdot e^{-\lambda_{n-1}(q_{n-1})(t_n - t_{n-1})} \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) dt_n \\ \cdot e^{-\lambda_n(q_n)(t - t_n)}$$

où l'on a :

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t.$$

Chaque terme :

$$e^{-\lambda_j(q_j)(t_{j+1} - t_j)} \lambda_j(q_j, q_{j+1}) dt_j$$

exprime la probabilité d'une transition $q_j \rightarrow q_{j+1}$ dans l'intervalle $(t_{j+1}, t_{j+1} + dt_{j+1})$, sachant que le système se trouve dans l'état q_j , à l'instant t_j , et le terme $e^{-\lambda_n(q_n)(t - t_n)}$ exprime que le système ne change pas d'état entre les instants t_n et t .

Si l'on fait la sommation sur toutes les valeurs possibles de t_1 , t_2 , ..., t_n on obtient :

$$(4, I) \quad P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t) = \int_{t_1=0}^t \int_{t_2=t_1}^t \dots \int_{t_{j+1}=t_j}^t \int_{t_n=t_{n-1}}^t \\ d^n P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t) = \lambda_0(q_0, q_1) \lambda_1(q_1, q_2) \dots \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) \cdot \\ \left\{ \frac{e^{-\lambda_0(q_0)t}}{[\lambda_1(q_1) - \lambda_0(q_0)] \dots [\lambda_n(q_n) - \lambda_0(q_0)]} \right. \\ \left. + \dots + \frac{e^{-\lambda_n(q_n)t}}{[\lambda_0(q_0) - \lambda_n(q_n)] \dots [\lambda_{n-1}(q_{n-1}) - \lambda_n(q_n)]} \right\}.$$

$P_{0n}(q_0, q_n; t)$ s'obtient en faisant une sommation sur toutes les

(4) *Remarque* : On peut écrire :

$$e^{-\lambda_0(q_0)t} \lambda_0(q_0, q_1) dt = \frac{\lambda_0(q_0, q_1)}{\lambda_0(q_0)} e^{-\lambda_0(q_0)t} \lambda_0(q_0) dt.$$

$\frac{\lambda_0(q_0, q_1)}{\lambda_0(q_0)}$ apparaît alors comme la probabilité pour que l'on ait la transition $q_0 \rightarrow q_1$ lorsqu'on sait qu'il y a une transition; on a bien d'ailleurs :

$$\sum_{(q_1)} \frac{\lambda_0(q_0, q_1)}{\lambda_0(q_0)} = 1.$$

valeurs possibles des paramètres $q_1, \dots, q_{n-1}$. Lorsque t est suffisamment petit pour que les $e^{-\lambda_j t}$ soient très voisins de l'unité, $P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t)$ devient équivalent à :

$$(5,1) \quad P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t) \simeq \lambda_0(q_0, q_1) \dots \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) \frac{t^n}{n!}$$

c'est un infiniment petit d'ordre n lorsque $t \rightarrow 0$.

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n, 0)}{dt} &= 0 \text{ pour } j = 0, 1, \dots, n-1. \\ \frac{d^n P_{0n}(q_0, \dots, q_n, 0)}{dt^n} &= \lambda_0(q_0, q_1), \dots, \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n). \end{aligned}$$

Un calcul élémentaire permet de trouver une relation différentielle liant deux probabilités successives :

$$(6,1) \quad \frac{dP_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t)}{dt} = \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) P_{0n-1}(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}; t) - \lambda_n(q_n) P_{0n}(q_0, \dots, q_n; t)$$

exprimant que l'accroissement de :

$$P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t),$$

pendant l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ est égal à la probabilité pour que le système passe de l'état q_{n-1} à l'état q_n diminuée de la probabilité pour qu'il change d'état dans cet intervalle de temps.

Sommant sur les paramètres $q_1, \dots, q_{n-1}$, on obtient de même la relation :

$$(7,1) \quad \frac{dP_{0n}(q_0, q_n; t)}{dt} = \sum_{(q_{n-1})} \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) P_{0n-1}(q_0, q_{n-1}; t) - \lambda_n(q_n) P_{0n}(q_0, q_n; t).$$

Jusqu'ici nous avons admis que les paramètres q_j prenaient des valeurs discontinues dans le cas où ils forment un ensemble continu, les expressions précédentes restent valables à condition de remplacer $\lambda_j(q_j, q_{j+1})$ par :

$$\lambda_j(q_j, q_{j+1}) \rho(q_{j+1}) dq_{j+1}$$

où $\rho(q_{j+1})$ est la densité des états au voisinage de l'état q_{j+1} .

Les sommations sont remplacées par des intégrations portant sur toutes les variations possibles des q_j .

On définit alors le passage d'un état q_j à un groupe d'états voisins d'un état de paramètre donné q_{j+1} à l'aide de la fonction continue $\lambda(q_j, q_{j+1}) \rho(q_{j+1})$.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE VÉRIFIÉE PAR $P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t)$. — Une équation différentielle linéaire d'ordre $(n + 1)$ à coefficients constants, admet des solutions de la forme e^{rt} , r étant solution de l'équation caractéristique :

$$f(r) = r^{n+1} + S_1 r^n + \dots + S_{n+1} = 0$$

où S_p représente la somme des produits de p racines de $f(r) = 0$.

Prenons pour racines :

$$r_0 = -\lambda_0(q_0) \dots r_n = -\lambda_n(q_n).$$

$P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t)$ est alors solution de l'équation :

$$\frac{d^{n+1}P}{dt^{n+1}} + S_1 \frac{d^n P}{dt^n} + \dots + S_{n+1} P = 0.$$

Les coefficients S_p étant déterminés par l'ensemble des constantes de décroissance $\lambda_0(q_0) \dots \lambda_n(q_n)$.

MÉLANGE D'ÉTATS INITIAUX. — Lorsqu'on a un mélange d'états, et non plus un cas pur à l'instant initial, il faut sommer sur toutes les transitions possibles à partir des états initiaux pour obtenir la probabilité de trouver le système dans un état q_n à l'instant t .

Désignons par $p(q_0)$ la probabilité d'un état donné q_0 à l'instant initial, la probabilité d'un état q_n à l'instant t devient :

$$P_n(q_n; t) = \sum_{(q_0)} p(q_0) P_{0n}(q_0, q_n; t),$$

c'est une fonction de la répartition initiale $p(q_0)$.

LES VIES MOYENNES. — Un système en évolution passant successivement par les états $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$, reste dans chaque état q un certain temps moyen : nous appellerons ce temps : vie moyenne du système dans l'état q . Pour un état q_n elle est donnée par :

$$(8,1) \quad \tau_{0n}(q_n) = \int_0^{+\infty} P_{0n}(q_0, q_n; t) dt.$$

La vie moyenne dans l'état q_0 s'obtient immédiatement :

$$(9,1) \quad \tau_{00}(q_0) = \frac{1}{\lambda_0(q_0)}.$$

Utilisant la formule différentielle (7,1) reliant P_{0n} à P_{0n-1} , on obtient en l'intégrant entre 0 et $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lambda_n(q_n) \int_0^{+\infty} P_{0n}(q_0, q_n; t) dt \\ = \sum_{(q_{n-1})} \lambda_{n-1}(q_{n-1}) \int_0^{+\infty} P_{0n-1}(q_0, q_{n-1}; t) dt - P_{0n}(q_0, q_n; +\infty). \end{aligned}$$

La vie moyenne n'est définie que pour des états quasi stationnaires (correspondant à une vie moyenne finie), on a donc :

$$P_{0n}(q_0, q_n; +\infty) = 0.$$

Il s'ensuit la relation de récurrence :

$$\lambda_n(q_n)\tau_{0n}(q_0, q_n) = \sum_{(q_{n-1})} \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n)\tau_{0n-1}(q_0, q_{n-1})$$

et la vie moyenne :

$$(10, 1) \quad \tau_{0n}(q_0, q_n) = \frac{1}{\lambda_n(q_n)} \sum_{(q_1 \dots q_{n-1})} \frac{\lambda_0(q_0, q_1)}{\lambda_0(q_0)} \cdot \frac{\lambda_1(q_1, q_2)}{\lambda_1(q_1)} \dots \frac{\lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n)}{\lambda_{n-1}(q_{n-1})}$$

conduisant à la relation :

$$\sum_{(q_n)} \lambda_n(q_n)\tau_{0n}(q_0, q_n) = 1.$$

La vie moyenne $\tau_{0n}(q_0, q_n)$ s'interprète de la manière suivante : c'est la vie moyenne $1/\lambda_n(q_n)$ du système lorsqu'il se trouve dans l'état q_n multiplié par la probabilité :

$$(11, 1) \quad P(q_0, q_n) = \sum_{(q_1 \dots q_{n-1})} \frac{\lambda_0(q_0, q_1)}{\lambda_0(q_0)} \dots \frac{\lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n)}{\lambda_{n-1}(q_{n-1})}$$

pour qu'il passe précisément par cet état.

Alors la relation $\sum_{(q_n)} \lambda_n(q_n)\tau_{0n}(q_0, q_n) = 1$ exprime simplement que :

$$\sum_{(q_n)} P(q_0, q_n) = 1,$$

le système doit nécessairement passer par l'un des états (q_n) .

REMARQUE SUR LA RÉPARTITION DES ÉTATS. — Après avoir subi la $n^{\text{ième}}$ transition, le système se trouve dans l'un des états (q_n) , quelle est la probabilité de le trouver dans l'un de ces états connaissant la probabilité $P_{0n}(q_0, q_n; t)$? Lorsque l'état (q_n) est stationnaire, le système a terminé son évolution pour $(t = \infty)$, et la probabilité cherchée :

$$P_{0n}(q_0, q_n) = P_{0n}(q_0, q_n; +\infty).$$

Lorsque l'état q_n n'est pas stationnaire, la probabilité est proportionnelle au temps passé par le système dans cet état :

$$(12, 1) \quad P_{0n}(q_0, q_n) = \frac{\tau_{0n}(q_n)}{\tau_{0n}} \\ \tau_{0n} = \sum_{(q_n)} \tau_{0n}(q_n).$$

Tout ceci est indépendant de la forme des probabilités $P_{0n}(q_0, q_n; t)$.

CAS OU LES ENSEMBLES (q_i) SONT IDENTIQUES. — Lorsque chaque ensemble (q_i) est identique, quel que soit i , à un ensemble (q) , une transition quelconque amène le système d'un état appartenant à l'ensemble (q) à un autre état de cet ensemble.

On peut alors chercher la probabilité de trouver le système à l'instant t dans un état particulier q de cet ensemble sans avoir à s'inquiéter du nombre de transitions subies pour y arriver, elle est donnée par :

$$P(q_0, q; t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{0n}(q_0, q; t).$$

Traduction en langage symbolique. — Nous utiliserons la transformation de Laplace qui fait correspondre à une fonction complexe $f(t)$, d'une variable réelle, positive t , une fonction complexe image :

$$(1,2) \quad F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

d'une variable complexe s de partie réelle positive :

$$R(s) \geq 0.$$

On note cette correspondance :

$$F(s) \mathbf{C} f(t).$$

Nous supposons connues les principales propriétés des fonctions images ainsi que la traduction des opérations que l'on peut effectuer sur les fonctions $f(t)$.

Nous rappellerons cependant quelques propriétés fondamentales d'un usage courant :

1° Une fonction $f(t)$ bornée et continue pour toute valeur positive de t , admet une image $F(s)$ holomorphe dans le demi-plan $R(s) > 0$.

2° L'original de $F(s)$ est donné par :

$$(2,2) \quad f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{zt} F(z) dz$$

prise le long d'une parallèle distante de ε de l'axe imaginaire ; où ε est un nombre de partie réelle positive supérieure ou égale à l'abscisse de la singularité la plus à droite de $F(z)$.

3° Les deux correspondances fondamentales :

$$(3,2) \quad sF(s) - f(0) \mathbf{C} f'(t) \quad (\text{dérivation})$$

$$(4,2) \quad F(s + \lambda) \mathbf{C} e^{-\lambda t} f(t) \quad (\text{translation})$$

seront d'un usage constant.

4° Si les deux fonctions $F_1(s)$, $F_2(s)$ images respectives de $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont telles que leur produit soit une image, il admet pour original :

$$(5,2) \quad \int_0^t f_1(t_1) f_2(t-t_1) dt \supset F_1(s) F_2(s).$$

On peut étendre ce résultat à un nombre quelconque de fonctions : le produit d'une suite $F_1(s), \dots, F_n(s)$, images respectives de $f_1(t), \dots, f_n(t)$ admet pour original :

$$(6,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(s) \cdot F_2(s) \dots F_n(s) \subset \int_0^t f_1(t_1) dt_1 \int_0^{t-t_1} f_2(t_2-t_1) dt_2 \\ \dots \int_0^{t-t_1-t_2} f_{n-1}(t_{n-1}-t_{n-2}) f_n(t-t_{n-1}) dt_{n-1} \end{array} \right.$$

5° Réciproquement, on peut chercher l'image du produit de deux fonctions, $f_1(t)$, $f_2(t)$ dont on connaît les images $F_1(s)$, $F_2(s)$.

La formule d'inversion nous permet d'écrire :

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\varepsilon_1-i\infty}^{\varepsilon_1+i\infty} \int_{\varepsilon_2-i\infty}^{\varepsilon_2+i\infty} F_1(z_1) F_2(z_2) e^{(z_1+z_2)t} dz_1 dz_2$$

et :

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \supset \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \int \int F_1(z_1) F_2(z_2) e^{(z_1+z_2)t} dz_1 dz_2 dt$$

lorsque l'inversion de l'ordre des intégrations est permise et que $R(z_1 + z_2) < R(s)$:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \supset \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\varepsilon_1-i\infty}^{\varepsilon_1+i\infty} \int_{\varepsilon_2-i\infty}^{\varepsilon_2+i\infty} \frac{F_1(z_1) F_2(z_2)}{z_2 + z_1 - s} dz_1 dz_2.$$

Lorsque $F_2(z_2)$ est holomorphe dans le demi-plan $R(z_2) > 0$, l'intégrale double se réduit à :

$$(7,2) \quad f_1(t) \cdot f_2(t) \supset \frac{1}{2i\pi} \int_{\varepsilon_1-i\infty}^{\varepsilon_1+i\infty} F_1(z) F_2(s-z) dz.$$

Prenant $\varepsilon_1 = \frac{s}{2}$ on a $z = \frac{s}{2} + i\varepsilon$.

$$(8,2) \quad f_1(t) \cdot f_2(t) \supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon\right) F_2\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) d\varepsilon$$

lorsque $f_1(t) = f_2^*(t)$:

$$F_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f_2^*(t) dt = \overline{F_2(s)}$$

où $\overline{F_2(s)}$ est la fonction complexe conjuguée de $F_2(s)$; on obtient alors l'image du carré du module d'une fonction complexe $f(t)$:

$$(9,2) \quad |f(t)|^2 \supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) \overline{F\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon\right)} d\varepsilon.$$

Images des probabilités. — Dans la traduction en langage symbolique des probabilités nous utiliserons les notations :

$$\Pi_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; s) \subset P_{0n}'(q_0, q_1, \dots, q_n; t)$$

$$\Pi_{0n}(q_0, q_n; s) = \sum_{(q_1 \dots q_{n-1})} \Pi_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; s) \subset P_{0n}(q_0, q_n; t).$$

Les images des probabilités s'obtiennent facilement :

$$(10,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{00}(q_0, s) = \frac{1}{s + \lambda_0(q_0)} \\ \Pi_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; s) = \frac{\lambda_0(q_0) \lambda_1(q_1, q_2) \dots \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n)}{[s + \lambda_0(q_0)][s + \lambda_1(q_1)] \dots [s + \lambda_n(q_n)]} \end{array} \right.$$

Ces expressions sont plus simples et plus générales que les originaux $P_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; t)$ puisqu'elles restent valables lorsque plusieurs λ du dénominateur deviennent égaux, ce qui n'est plus exact pour les originaux.

A l'expression de l'original, lorsque $t \rightarrow 0$ correspond pour image, l'image limite lorsque $s \rightarrow \infty$, on vérifie bien que pour $s \rightarrow \infty$:

$\Pi_{0n}(q_0, q_1, \dots, q_n; s) \sim \lambda_0(q_0, q_1) \dots \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) \frac{1}{s^{n+1}}$ est la traduction de la forme de la probabilité (5,1) lorsque $t \rightarrow 0$.

La relation différentielle (7,1) entre deux probabilités successives s'écrit :

$$(11,2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(q_{n-1})} \lambda_{n-1}(q_{n-1}, q_n) \Pi_{0n-1}(q_0, q_{n-1}; s) \\ = s \Pi_{0n}(q_0, q_n; s) + \lambda_n(q_n) \Pi_{0n}(q_0, q_n; s). \end{array} \right.$$

Lorsque l'état initial est un mélange et que les ensembles (q_n) sont identiques à un même ensemble (q) , on obtient l'image de la probabilité de trouver le système dans un état q à l'instant t en faisant la sommation :

$$\Pi(q, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_n(q, s)$$

où $\Pi_n(q, s)$ est l'image de la probabilité de trouver le système dans l'état q après n transitions.

On a donc, $p(q)$ étant la distribution initiale des états (q) :

$$\Pi_0(q, s) = \frac{p(q)}{s + \lambda(q)}$$

$$\Pi_n(q, s) = \sum_{(q_n \dots q_1)} \frac{p(q_n) \lambda(q_n, q_{n-1}) \dots \lambda(q_1, q)}{[s + \lambda(q_n)] \dots [s + \lambda(q)]}$$

$\Pi(q, s)$ est donc solution de l'équation intégrale :

$$(12,2) \quad \Pi(q, s) = \frac{p(q)}{s + \lambda(q)} + \sum_{(q' \neq q)} \frac{\lambda(q', q)}{s + \lambda(q)} \Pi(q', s).$$

On peut définir une distribution stationnaire constante au cours du temps, $\Pi(q, s)$ prend alors la forme :

$$\Pi(q, s) = \frac{p(q)}{s}$$

portant dans l'équation intégrale, $p(q)$ doit être solution de :

$$\lambda(q)p(q) = \sum_{(q' \neq q)} \lambda(q', q)p(q').$$

C'est une équation homogène ayant les λ pour coefficients, on vérifie que le déterminant des coefficients est nul si l'on tient compte de la relation :

$$\lambda(q) = \sum_{(q' \neq q)} \lambda(q, q').$$

Le premier mineur que l'on extrait du déterminant n'étant pas nul, nous avons une solution et une seule satisfaisant à la condition supplémentaire de normalisation :

$$\sum_{(q)} p(q) = 1.$$

LES VIES MOYENNES. — Le temps moyen passé par un système, dans un état q_n , s'obtient d'une manière simple à partir de l'image :

$$\Pi_{0n}(q_0, q_n; s),$$

en effet :

$$(13,2) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{0n}(q_0, q_n) &= \int_0^{+\infty} P_{0n}(q_0, q_n; t) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} P_{0n}(q_0, q_n; t) dt = \Pi_{0n}(q_0, q_n; +0). \end{aligned} \right.$$

La valeur limite $\Pi_{0n}(q_0, q_n; +0)$, de l'image lorsque $s \rightarrow 0$ par valeurs positives est le temps moyen passé par le système dans l'état q_n s'il se trouvait dans l'état q_0 , à l'instant initial. Faisant $s = 0$, dans l'expression obtenue pour $\Pi_0(q_0, q_n; s)$, on retrouve les formes données précédemment pour les vies moyennes.

La répartition $P_{0n}(q_0, q_n)$ des états q_n s'obtient alors sous la forme :

$$(14,2) \quad P_{0n}(q_0, q_n) = \frac{\tau_{0n}(q_n)}{\tau_{0n}} = \frac{\Pi_{0n}(q_0, q_n; +0)}{\sum_{(q_n)} \Pi_{0n}(q_0, q_n; +0)}.$$

CHAPITRE II

Méthode de variation des constantes.

Pour étudier l'évolution d'un système au cours du temps, nous avons besoin d'une description physique des phénomènes, au moyen d'équations qui nous fournissent des probabilités. Ceci est précisément le cas de l'interprétation statistique de la mécanique quantique.

L'ensemble des propriétés physiques d'un système est représenté par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$, fonction des coordonnées d'espace-temps, à laquelle on impose d'être une solution de carré sommable, d'une équation aux dérivées partielles : l'équation d'onde, qui s'écrit sous la forme générale :

$$(1,3) \quad H_1 \Psi(\vec{r}, t) = i \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

avec :

$$\int \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) d\vec{r} = 1$$

où, dans la représentation de Schrödinger, H_1 est un opérateur hermitique indépendant du temps, opérant sur les variations du système.

On obtient la solution sous forme opératorielle de cette équation en écrivant que :

$$(2,3) \quad \Psi(\vec{r}, t) = e^{-itH_1} \Psi(\vec{r}, 0)$$

où $\Psi(\vec{r}, 0)$ désigne la fonction d'onde du système à l'instant initial $t = 0$. Sa transformée de Laplace s'écrit :

$$(3,3) \quad \Phi(\vec{r}, s) = \frac{1}{s + iH_1} \Psi(\vec{r}, 0).$$

La recherche des fonctions et énergies propres consiste à trouver les fonctions $\Psi_m(\vec{r})$ de carré sommable pour lesquelles :

$$(4,3) \quad H_1 \Psi_m(\vec{r}) = \epsilon_m \Psi_m(\vec{r}).$$

Cet ensemble forme un système de base complet orthonormé ainsi, toute fonction $\Psi(\vec{r}, 0)$ peut se mettre sous la forme d'un développement :

$$(5,3) \quad \Psi(\vec{r}, 0) = \sum_m a_m \Psi_m(\vec{r}).$$

Portant ce développement dans le second membre de la solution (3,3) :

$$(6,3) \quad \Phi(\vec{r}, s) = \sum_m \frac{a_m}{s + iH_T} \Psi_m(\vec{r}) = \sum_m \frac{a_m}{s + i\nu_m} \Psi_m(\vec{r}).$$

On voit qu'au cours du temps, le carré du module du coefficient de $\Psi_m(\vec{r})$ est conservé, on interprète alors $|a_m|^2$ comme la probabilité de trouver le système dans un état $|m\rangle$ défini par la fonction stationnaire $\Psi_m(\vec{r})$ dans la superposition d'états de la fonction d'onde initiale.

Lorsque la fonction d'onde peut être entièrement décomposée en série de fonctions propres des états stationnaires du système, il n'y a plus d'évolution au cours du temps. Ceci est toujours possible lorsque l'hamiltonien ne contient pas d'opérateurs de création ou d'annihilation de particules. Ecrivons l'équation transformée de (1) :

$$(7,3) \quad (s + iH_T)\Phi(\vec{r}, s) = \Psi(\vec{r}, 0)$$

et développons $\Phi(\vec{r}, s)$ et $\Psi(\vec{r}, 0)$ dans un système de base complet orthonormé quelconque $\varphi_m(\vec{r})$:

$$(8,3) \quad \begin{cases} \Phi(\vec{r}, s) = \sum_{m'} \alpha(m', s) \varphi_{m'}(\vec{r}) \\ \Psi(\vec{r}, 0) = \sum_{m'} \alpha(m', 0) \varphi_{m'}(\vec{r}) \end{cases}$$

portons dans (7,3), multiplions à gauche par $\varphi_m^*(\vec{r})$ et intégrons dans l'espace, on obtient alors l'équation fondamentale de la méthode des perturbations :

$$(I) \quad \alpha(m, s) = \frac{\alpha(m, 0)}{s} + \sum_{|m'\rangle} \langle m | H_T | m' \rangle \frac{\alpha(m', s)}{is}.$$

Cette équation est valable pour un système de base complet orthonormé quelconque, c'est l'équation la plus générale du calcul des perturbations.

SÉPARATION DE L'HAMILTONIEN. — Pour étudier l'évolution d'un système physique en interaction avec un champ de particules qu'il peut créer et annihiler, nous séparerons l'hamiltonien exprimant le comportement du système dans le champ en deux parties :

1) la partie de l'hamiltonien ne contenant pas d'opérateur de création ou d'annihilation, qui se compose, d'une part de la partie décrivant

le système en l'absence de champ, d'autre part, de celle décrivant le champ libre ;

2) la partie contenant les opérateurs de création et d'annihilation qui exprime l'interaction entre le système et le champ.

Nous noterons respectivement par H_0 et $-H$ ces deux parties.

Dans la théorie électro-magnétique de l'émission, H_0 se compose de l'hamiltonien de la matière et de celui du champ libre de radiation, $-H$ contient les opérateurs de création et d'annihilation de photons.

L'équation d'onde prend alors la forme :

$$(9,3) \quad H_T \Psi(\vec{r}, t) = (H_0 - H) \Psi(\vec{r}, t) = i \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}.$$

La fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ doit décrire simultanément la matière et le champ de radiation. Le champ est décrit par une fonction indiquant le nombre de particules dans chaque état possible du champ libre. On peut de la même manière décrire le système à l'aide des états propres de la matière en l'absence de champ. L'ensemble système + radiation est alors décrit par un développement de la forme :

$$(10,3) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \sum_{|m\rangle} a(m, t) \Psi_m(\vec{r})$$

où :

$$(11,3) \quad \Psi_m(\vec{r}) = \Psi_p(\vec{r}) \Phi(n_k) \quad |m\rangle = |p\rangle \cdot |k\rangle.$$

La sommation portant sur tous les états $|p\rangle$ du système non perturbé et sur tous les états $|k\rangle$ du champ, $\Phi(n_k)$ est une fonction indiquant le nombre de particules du champ dans chaque état de la particule individuelle. On interprète alors $a(m, t)$ comme étant l'amplitude de probabilité de trouver simultanément le système dans un état $|p\rangle$ et le champ dans un état $|k\rangle$ représenté par la fonction $\Phi(n_k)$ à l'instant t .

La solution sous forme opératorielle :

$$(12,3) \quad \Psi(\vec{r}, t) = e^{-it(H_0 - H)} \Psi(\vec{r}, 0)$$

a pour transformée :

$$(13,3) \quad \Phi(\vec{r}, s) = \frac{1}{s + i(H_0 - H)} \Psi(\vec{r}, 0).$$

Utilisant le développement dans la base des fonctions non perturbées et tenant compte du fait que :

$$(14,3) \quad H_0 \Psi_p(\vec{r}) \Phi(n_k) = v_m \Psi_p \Phi(n_k)$$

où v_m représente l'énergie du système dans l'état $|p\rangle$ augmentée de

l'énergie du champ dans l'état $\Phi(n_k)$, on obtient en remplaçant $\Psi(\vec{r}, o)$ par son développement après multiplication à gauche par $\Psi_m^*(\vec{r})$ et intégration sur l'espace :

$$(15,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(m, s) = \sum_{|m' \rangle} \langle m | \frac{1}{s + i(H_0 - H)} | m' \rangle a(m', o) \\ \alpha(m, s) \subset \alpha(m, t) \end{array} \right.$$

où : $|m \rangle = |p \rangle \cdot |k \rangle$ représente un état simultané de la matière et du champ.

La solution (15,3) est indépendante du système de base complet orthonormé.

Lorsqu'on prend pour base celle des fonctions propres (14,3), l'équation (15,3) devient :

$$(16,3) \quad \alpha(m, s) = \sum_{|m' \rangle} \langle m | \frac{1}{s + i\nu_{m'} - iH} | m' \rangle a(m', o).$$

Si l'on opère un développement en série de puissance de H , considéré comme petit, l'équation (13,3) devient :

$$(17,3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}, s) = \left\{ 1 + \frac{1}{s + iH_0} [iH + iH \frac{1}{s + iH_0} iH + \dots] \right\} \\ \cdot \frac{1}{s + iH_0} \Psi(\vec{r}, o). \end{array} \right.$$

Dans le système de fonction de base des états propres de H_0 , $\alpha(m, s)$ est solution de :

$$(II) \quad \alpha(m, s) = \frac{\alpha(m, o)}{s + i\nu_m} + \sum_{|m' \rangle} \frac{\langle m | H | m' \rangle}{\nu_m - is} \alpha(m', s).$$

Nous allons chercher à regrouper les termes obtenus dans le développement de (II) ou de (I) ce qui est équivalent, par rapport aux puissances de l'hamiltonien de perturbation, de manière à obtenir des formes pour les amplitudes α qui nous conduisent à des probabilités en accord avec celles trouvées dans le premier paragraphe.

Méthode de résolution. — Considérons un système dans un état initial $|m \rangle$, et cherchons l'ensemble des processus conduisant à un état $|m' \rangle$.

D'une manière générale, le système peut être décomposé en deux parties :

- 1) Un système émetteur susceptible de créer et d'absorber des particules : le système matériel.
- 2) Un ensemble de particules créées par ce système : le champ.

L'hamiltonien de perturbation représente l'interaction existante entre le système émetteur et le champ.

Pour pouvoir représenter l'évolution sous forme de graphiques, nous faisons correspondre à chaque point de coordonnées entières (i, j) d'un plan, l'ensemble des états du système possédant j particules, tandis que i désigne le nombre de transitions subies par le système, à partir d'un état initial donné pour parvenir à l'un des états de cet ensemble.

A chaque point (i, j) correspond donc l'ensemble des états définis :

- 1) par les états du système émetteur ;
- 2) par les états du champ contenant j particules.

Lorsque l'on ne peut concevoir qu'un champ possède un nombre négatif de particules, il faut éliminer la portion de plan correspondant à $j < 0$, de même $i < 0$ ne correspond à rien, ainsi les seuls points possédant une signification physique sont les points de coordonnées entières du quart de plan :

$$i \geq 0 \quad j \geq 0.$$

Lorsque les particules constituant le champ ne possèdent aucune interaction entre elles, on peut décomposer l'état du champ en un produit d'états individuels de chaque particule :

$$|k\rangle = |k_1\rangle \cdot |k_2\rangle \dots |k_j\rangle$$

où $|k_j\rangle$ représente l'état d'une des particules du champ constitué de j particules.

On peut poser d'une manière générale :

$$|m\rangle = |p\rangle \cdot |k\rangle = |p, k\rangle$$

indiquant que chaque état $|m\rangle$ est constitué par la superposition de l'état du système émetteur et du champ.

Dans quelles conditions deux états en des points différents (i, j) et (i', j') peuvent-ils être identiques ? Il est tout d'abord nécessaire que le champ soit constitué par un même nombre de particules $j = j'$, ensuite, il faut et il suffit que l'état du système émetteur et du champ soit identique en ces points, seuls, des états appartenant à une même horizontale peuvent être identiques.

En calcul des perturbations, on définit, comme états du système émetteur et du champ, les états propres de l'hamiltonien non perturbé.

Nous désignerons par $|m\rangle$ sans indice, un état quelconque donné du système émetteur et du champ, et par $|m_n\rangle$ un état du système émetteur et du champ possédant n particules.

En gros deux problèmes principaux se posent :

- 1) déterminer l'ensemble des processus conduisant d'un état initial $|m\rangle$ au même état $|m\rangle$, ce qui revient à rechercher l'ensemble des processus où le système ne change pas d'état ;

2) déterminer l'ensemble des processus conduisant d'un état initial $|m\rangle$ à un état final $|m'\rangle \neq |m\rangle$.

Appelons graphique d'évolution, une ligne brisée du plan (i, j) joignant un point figuratif de l'état initial $|m\rangle$ à un point figuratif de l'état final $|m'\rangle$ de telle manière qu'entre deux points figuratifs successifs, nous ayons :

$$\Delta i = 1.$$

A chacun de ces graphiques on peut faire correspondre un processus d'évolution traduisant une des possibilités pour le système, partant de l'état initial $|m\rangle$, d'atteindre l'état final $|m'\rangle$.

Lorsque le système ne peut créer ou annihiler simultanément qu'une seule particule du champ, les seuls graphiques conduisant à des processus d'évolution donnant une contribution non nulle sont ceux pour lesquels :

$$\Delta j = \pm 1 \quad \text{pour} \quad \Delta i = 1.$$

LES FONCTIONS ASSOCIÉES. — Considérons les graphiques d'évolution conduisant d'un état initial $|m\rangle$ (figuré par l'un des points de coordonnée entière de la demi-droite positive $i = 0$), à un état final $|m'\rangle$ dont le point figuratif se trouve sur la demi-droite positive $i = n$.

A l'ensemble de ces graphiques, on fait correspondre une fonction, dite fonction associée d'ordre n et notée $(m' | g_n | m)$, qui contient une sommation sur tous les états intermédiaires par lesquels peut passer le système pour aller de l'état $|m\rangle$ à l'état $|m'\rangle$ au moyen de n transitions, en omettant toutefois dans cette sommation les états $|m'\rangle$. On note d'une manière plus générale par :

$$(m' | m'', m''', \dots, | g_n | m)$$

une fonction associée d'ordre n dans laquelle les états $|m''\rangle$, $|m'''\rangle \dots$ sont omis lors de la sommation sur les états intermédiaires.

Le produit de deux fonctions associées :

$$(m' | g_r | m'')(m'' | g_q | m)$$

est une fonction associée d'ordre $q + r$ pour laquelle le $q^{\text{ième}}$ état intermédiaire est obligatoirement l'état $|m''\rangle$, cet état étant omis comme état intermédiaire antérieurement au passage par $|m''\rangle$, et l'état $|m'\rangle$ postérieurement à ce passage.

La fonction associée au passage d'un état initial $|m\rangle$ à un état final $|m'\rangle$ est la somme des contributions apportées par chaque graphique d'évolution conduisant de l'état $|m\rangle$ à l'état $|m'\rangle$.

Nous avons classé ces graphiques suivant le nombre de transitions nécessaires pour aller de $|m\rangle$ à $|m'\rangle$, et nous y avons fait corres-

pondre les fonctions $\langle m' | g_n | m \rangle$. La fonction associée au passage de $| m \rangle$ à $| m' \rangle$ se composera de la somme de ces fonctions :

$$(1,4) \quad \langle m' | G | m \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle m' | g_n | m \rangle$$

$\langle m' | G | m \rangle$ est la fonction totale associée au passage d'un état $| m \rangle$ à un état $| m' \rangle$, ce dernier étant omis comme état intermédiaire.

Cherchons maintenant comment décomposer les graphiques ayant même état initial et final $| m \rangle$, ce qui revient à étudier l'ensemble des transitions où le système ne change pas d'état.

Il est clair que chaque fonction $\langle m | g_n | m \rangle$ est associée à l'un des processus possibles, mais le produit d'un nombre quelconque de ces fonctions est aussi associé à l'un des processus possibles, de sorte que l'on peut écrire la fonction associée à l'ensemble des possibilités, avec répétition de l'état initial comme état intermédiaire sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{n_1} \langle m | g_{n_1} | m \rangle + \sum_{n_1, n_2} \langle m | g_{n_1} | m \rangle \langle m | g_{n_2} | m \rangle + \dots \\ + \sum_{n_1, \dots, n_q} \langle m | g_{n_1} | m \rangle \dots \langle m | g_{n_q} | m \rangle + \dots \\ = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{n_1 \dots n_q} \langle m | g_{n_1} | m \rangle \dots \langle m | g_{n_q} | m \rangle \end{aligned}$$

où les indices n_q varient de 1 à $+\infty$.

Si l'on se rappelle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle m | g_n | m \rangle = \langle m | G | m \rangle$$

l'expression devient :

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \langle m | G | m \rangle^q = \frac{\langle m | G | m \rangle}{1 - \langle m | G | m \rangle}.$$

Pour tenir compte du fait que le système se trouve d'abord dans son état initial avant de subir les transitions qui le maintiennent dans ce même état, il faut ajouter la quantité $\langle m | g_0 | m \rangle = 1$, qui y correspond, et l'on obtient finalement :

$$(2,4) \quad 1 + \frac{\langle m | G | m \rangle}{1 - \langle m | G | m \rangle} = \frac{1}{1 - \langle m | G | m \rangle}$$

qui épuise l'ensemble des graphiques permettant à un système de rester dans son état initial $| m \rangle$.

La fonction traduisant l'ensemble des graphiques conduisant d'un

état $|m\rangle$ à un état $|m'\rangle$ (admis comme état intermédiaire), s'obtient en décomposant l'évolution en deux parties :

1° l'ensemble des processus conduisant de $|m\rangle$ à $|m'\rangle$ en omettant $|m'\rangle$ comme état intermédiaire;

2° l'ensemble des processus conduisant de $|m'\rangle$ à $|m'\rangle$, ce qui conduit à l'expression :

$$(3,4) \quad \frac{1}{1 - \langle m' | G | m' \rangle} \langle m' | G | m \rangle$$

où l'on a :

$$|m'\rangle \neq |m\rangle.$$

RELATIONS SATISFAITES PAR LES FONCTIONS TOTALES ASSOCIÉES. — L'ensemble des processus conduisant d'un état $|m\rangle$ à un état $|m'\rangle$, sans utilisation de $|m'\rangle$ comme état intermédiaire, admet pour fonction totale associée $\langle m' | G | m \rangle$.

Appelons $|m''\rangle$ le premier état intermédiaire du système dans son évolution vers l'état final $|m'\rangle$. La fonction associée au passage de $|m\rangle$ à $|m''\rangle$ au moyen d'une seule transition est $\langle m'' | g_1 | m \rangle$. La fonction associée à l'ensemble des processus permettant le passage de $|m''\rangle$ à $|m'\rangle$ en omettant $|m'\rangle$ comme état intermédiaire est $\langle m' | G | m'' \rangle$.

En combinant tous ces processus, on obtient :

$$(4,4) \quad \langle m' | G | m \rangle = \langle m' | g_1 | m \rangle + \sum_{|m''\rangle \neq |m'\rangle} \langle m' | G | m'' \rangle \langle m'' | g_1 | m \rangle.$$

Associions une fonction totale G_0 à l'ensemble des processus où le nombre des particules du champ n'est pas modifié : à chaque particule créée correspond une particule annihilée. L'ordre des fonctions associées est alors pair. Définissons, d'autre part, une fonction G_0^0 associée à l'ensemble des processus où :

1° le nombre des particules n'est pas modifié;

2° aucun état intermédiaire n'existe sur la droite $j = C^0$, supportant les états initial et final.

L'ensemble des processus conduisant d'un état $|m_j\rangle$ à un état $|m'_j\rangle$ se compose de l'ensemble des processus obtenus en omettant les états intermédiaires contenant j particules, augmenté de l'ensemble des processus dont les états intermédiaires possèdent j particules.

$\langle m'_j | G_0 | m_j \rangle$ est donc lié à $\langle m'_j | G_0^0 | m_j \rangle$ par la relation :

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle m'_j | G_0 | m_j \rangle &= \langle m'_j | G_0^0 | m_j \rangle \\ &+ \sum_{|m''_j\rangle \neq |m'_j\rangle} \langle m'_j | G_0 | m''_j \rangle \langle m''_j | G_0^0 | m_j \rangle. \end{aligned} \right.$$

DÉCOMPOSITION DES PROCESSUS DE TRANSITION. — Un cas particulièrement important est celui où le système ne peut créer ou annihiler qu'une seule particule lors d'une transition. Les graphiques d'évolution sont des lignes brisées telles que l'on ait entre deux points figuratifs successifs :

$$\Delta i = 1 \quad \Delta j = \pm 1.$$

$\Delta j = 1$ lors de la création d'une particule,

$\Delta j = -1$ lors de l'annihilation d'une particule.

Le point figuratif d'un état initial $|m_0\rangle$ du système ne possédant aucune particule du champ a pour coordonnées $(0, 0)$. Au processus d'émission d'une particule à partir de l'état $|m_0\rangle$, correspond l'ensemble des graphiques partant de l'origine des coordonnées et aboutissant à l'un des points figuratifs de l'état $|m_1\rangle = |p_1, k_1\rangle$, de coordonnées $(2n + 1, 1)$, n variant de 0 à $+\infty$.

On décompose chaque graphique en trois parties :

1° la partie de la ligne brisée située entre l'origine et le dernier point A de l'horizontal $j = 0$ par lequel passe le graphique ;

2° la partie de la ligne brisée située entre le point A et le premier point B situé sur $j = 1$ tel que l'émission de $|k_1\rangle$ soit comprise entre A et B ;

3° la partie de la ligne brisée située entre B et le point figuratif de l'état final.

Il est clair d'après cette décomposition que tous les points représentatifs du graphique à droite de A sont situés au-dessus de la droite $j = 0$.

La fonction représentant l'ensemble des processus aboutissant à $|m_1\rangle$ s'écrit alors :

$$(6,4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 - (m_1 | G_0 | m_1)} \{ (m_1 | G_0 | m'_1) [1 - (m_1 | m'_1)] + (m_1 | m'_1) \} \\ & \cdot (m'_1 | G_1 | m'_0) \frac{1}{1 - (m'_0 | G_0 | m'_0)} \\ & \cdot \{ (m'_0 | G_0 | m_0) [1 - (m'_0 | m_0)] + (m'_0 | m_0) \} \end{aligned} \right.$$

où :

$$\begin{aligned} |m_0\rangle &= |p_0\rangle & |m'_0\rangle &= |p'_0\rangle \\ |m'_1\rangle &= |p'_1, k_1\rangle & |m_1\rangle &= |p_1, k_1\rangle \end{aligned}$$

et :

$$(m'_i | m_i) \equiv (m'_i | g_0 | m_i) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |m'_i\rangle \neq |m_i\rangle \\ 1 & \text{pour } |m'_i\rangle \equiv |m_i\rangle \end{cases}$$

une sommation étant à faire sur tous les états intermédiaires $|p'_0\rangle$ et $|p'_1\rangle$ du système matériel.

G_1 est associée à l'émission d'une particule dans un état $|k_1\rangle$, tandis que G_0 est associée à la création suivie d'annihilation de particules du champ, c'est-à-dire à des transitions où l'état du champ ne varie pas.

Il faut noter qu'il n'existe aucun état intermédiaire ne comportant pas la présence d'au moins une particule du champ dans l'ensemble des processus conduisant de $|m'_0\rangle$ à $|m'_1\rangle$ ainsi que de $|m'_1\rangle$ à $|m_1\rangle$.

La fonction $(m'_1 | G_1 | m'_0)$ est la fonction totale associée à la création d'une seule particule.

Pour montrer comment opérer la décomposition d'un graphique lorsque l'on a la création de plus d'une particule du champ, envisageons le cas où l'état initial est un état $|m_0\rangle$ et où l'état final est un état $|m_2\rangle$ contenant deux particules du champ dans des états : $|k_1\rangle$ et $|k_2\rangle$.

On décompose comme précédemment le graphique en trois parties :

1° depuis l'origine jusqu'au dernier point figuratif A situé sur la droite $j=0$;

2° depuis A jusqu'au premier point C situé sur la droite $j=2$ contenant les créations de $|k_1\rangle$ et $|k_2\rangle$;

3° depuis C jusqu'au point figuratif de l'état $|m_2\rangle$.

Puis, on cherche à décomposer la seconde partie si cela est possible. Pour cela, on regarde s'il existe un point B situé sur $j=1$ tel que la création de $|k_1\rangle$ (ou de $|k_2\rangle$) ait lieu entre A et B. Si un tel point existe, la création de $|k_2\rangle$ (ou de $|k_1\rangle$) a lieu entre B et C et le graphique peut être décomposé. Dans le cas contraire, le graphique est irréductible.

La partie réductible du graphique conduit dans l'intervalle AC à une fonction :

$$(7,4) \quad \left\{ (m'_2 | G_1 | m'_1) \frac{1}{1 - \frac{1}{(m_1 | G_0 | m_1)}} \right. \\ \left. \{ (m_1 | R_0 | m'_1) + (m_1 | m'_1) \} (m_1 | G_1 | m'_0) \right\}$$

où l'on utilise pour simplifier la notation :

$$(m_1 | R_0 | m'_1) = \begin{cases} (m_1 | G_0 | m'_1) & \text{pour } |m'_1\rangle \neq |m_1\rangle \\ 0 & \text{pour } |m'_1\rangle \equiv |m_1\rangle. \end{cases}$$

La création de $|k_1\rangle$ a lieu entre $|m'_0\rangle$ et $|m'_1\rangle = |p'_1, k_1\rangle$ et la création de $|k_2\rangle$ entre $|m_1\rangle = |p_1, k_1\rangle$ et $|m'_2\rangle = |p'_2, k_1, k_2\rangle$. On notera $(m'_2 | G_2 | m'_0)$ la partie irréductible traduisant une création simultanée de deux particules par le système émetteur.

La fonction traduisant l'émission de deux particules s'écrit alors :

$$(8,4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 - (m_2 | G_0 | m_2)} \{ (m_2 | R_0 | m'_2) + (m_2 | m'_2) \} \\ & [m'_2 | G_2 | m'_0] + (m'_2 | G_1 | m_1) \frac{1}{1 - (m_1 | G_0 | m_1)} \\ & \{ m_1 | R_0 | m'_1 \} + (m_1 | m'_1) \{ m'_1 | G_1 | m'_0 \}] \\ & \cdot \frac{1}{1 - (m'_0 | G_0 | m'_0)} \{ (m'_0 | R_0 | m_0) + (m'_0 | m_0) \} \end{aligned} \right.$$

où nous devons effectuer une sommation sur tous les états intermédiaires du système matériel entre l'état initial $|m_0\rangle$ et l'état final $|m_2\rangle$. Les quantités $\{ (m_i | R_0 | m'_i) + (m_i | m'_i) \}$ expriment une partie de la réorganisation des états due à l'interaction créée par les échanges de particules du champ entre les constituants du système émetteur.

Si nous examinons l'ensemble des processus conduisant d'un état $|m_0\rangle$ à un état $|m_n\rangle$ contenant n particules du champ, nous pouvons d'une manière analogue à celle qui vient d'être décrite, décomposer chaque processus au moyen des fonctions $(m'_{j+i} | G_i | m_j)$, i variant de 0 à $(n - 1)$; la partie irréductible définira précisément la fonction $(m_n | G_n | m_0)$, dont la signification est liée à la création simultanée de n particules à laquelle elle apporte une contribution.

Lorsque l'on a un mélange d'états à l'instant initial et que chaque état $|m_0\rangle$ est pondéré par une fonction $A(m_0, 0)$, il faut effectuer une sommation sur tous les états initiaux pondérés pour épuiser les processus conduisant à un état final donné.

RELATION LIANT G_0^0 A G_1 . — $(m'_0 | G_0^0 | m_0)$ est la fonction totale associée au passage de $|m_0\rangle$ à $|m'_0\rangle$ excluant tout état intermédiaire ne contenant pas de particule du champ; tandis que $(m_1 | G_1 | m_0)$ est associée à l'émission d'une particule du champ, les états intermédiaires contenant tous au moins une particule du champ.

L'ensemble des processus conduisant à G_0^0 peut être décrit en trois parties :

1° partant de l'état initial $|m_0\rangle$ le système matériel crée une particule dans un état $|k_1\rangle$ en subissant la transition $|p_0\rangle \rightarrow |p'_1\rangle$;

2° le système passe de l'état $|p'_1\rangle$ à l'état $|p_1\rangle$ sans modifier l'état du champ, par échange de particules du champ;

3° il passe de $|p_1\rangle$ à $|p_1\rangle$, pour finalement retomber dans un état $|m'_0\rangle$ après réabsorption de la particule $|k_1\rangle$ émise. L'ensemble de ces processus, après sommation sur les états intermédiaires, fournit une relation liant G_0^0 à G_1 :

$$(9,4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (m'_0 | G_0^0 | m_0) = (m'_0 | g_1 | m_0) + \sum_{|m_1\rangle, |p'_1\rangle} (m'_0 | g_1 | m_1) \\ & \frac{1}{1 - (m_1 | G_0 | m_1)} \cdot \{ (m_1 | R_0 | m'_1) + (m_1 | m'_1) \} (m'_1 | G_1 | m_0), \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{où : } |m_0\rangle &= |p_0\rangle, \\ |m'_1\rangle &= |p'_1, k_1\rangle, \\ |m_1\rangle &= |p_1, k_1\rangle. \end{aligned}$$

ÉQUATION VÉRIFIÉE PAR LA FONCTION ASSOCIÉE A L'ENSEMBLE DES PROCES-
SUS OU IL N'Y A PAS CHANGEMENT D'ÉTAT DU CHAMP. — Si les états ini-
tiaux $|m_0\rangle$ sont pondérés par des quantités $A_0(m_0)$ et si l'on appelle
 $A(m_0)$ la fonction associée à l'ensemble des processus qui conservent
l'état $|m_0\rangle$:

$$\begin{aligned} A(m_0) &= \frac{A_0(m_0)}{1 - (m_0 | G_0 | m_0)} + \sum_{|m'_0\rangle \neq |m_0\rangle} (m_0 | G_0 | m'_0) \frac{A_0(m'_0)}{1 - (m'_0 | G_0 | m'_0)} \\ &= A_0(m_0) + \sum_{|m'_0\rangle} \frac{(m_0 | G_0 | m'_0)}{1 - (m'_0 | G_0 | m'_0)} A_0(m'_0) \end{aligned}$$

l'équation :

$$(5,4 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} (m_0 | G_0 | m'_0) &= (m_0 | G_0^0 | m'_0) \\ &+ \sum_{|m''_0\rangle \neq |m'_0\rangle} (m_0 | G_0^0 | m''_0) (m''_0 | G_0 | m'_0) \end{aligned} \right.$$

liant $(m_0 | G_0 | m'_0)$, dont l'état *initial* est omis comme état intermé-
diaire, à G_0^0 , permet l'élimination de $(m_0 | G_0 | m'_0)$ et conduit à l'équa-
tion :

$$(10,4) \quad A(m_0) = A_0(m_0) + \sum_{|m'_0\rangle} (m_0 | G_0^0 | m'_0) A(m'_0)$$

$A(m_0)$ ne dépend donc que de $(m_0 | G_0^0 | m'_0)$.

Cette relation nous permettra la détermination des états quasi station-
naires.

Solution des équations de perturbation. — On peut obtenir une solu-
tion par approximations successives de l'équation fondamentale :

$$(I) \quad \alpha(m, s) = \frac{a(m, 0)}{s} + \sum_{|m'\rangle} \langle m | H_0 - H | m' \rangle \frac{\alpha(m', s)}{is}$$

où l'ensemble des fonctions de base φ_m est complet, orthonormé et quel-
conque, mais où le nombre de particules du champ dans chaque état
est déterminé, en opérant un développement ayant pour première
approximation :

$$\alpha_0(m, s) = \frac{a(m, 0)}{s}.$$

Chaque terme du développement contient un produit des éléments de matrice de $H_0 - H$ dans la base φ_m .

La méthode développée précédemment s'applique en identifiant chaque fonction associée $(m | g_n | m')$ à l'ensemble des termes contenant un produit de n éléments de matrice :

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{aligned} (m | g_n | m') = & \sum_{(|m^{(1)}>\dots|m^{(n-1)}>)\neq|m>} \frac{1}{is} \langle m | H_0 - H | m^{(n-1)} \rangle \\ & \frac{1}{is} \langle m^{(n-1)} | H_0 - H | m^{(n-2)} \rangle \dots \frac{1}{is} \langle m^{(1)} | H_0 - H | m' \rangle. \end{aligned} \right.$$

La sommation portant sur la suite des états intermédiaires successifs $|m^{(1)}>\dots|m^{(n-1)}>$ différents de l'état final $|m>$. Nous réalisons de cette manière une correspondance biunivoque entre chaque terme du développement de l'équation fondamentale et les fonctions associées aux différents processus d'évolution.

Nous reportant à la définition des fonctions totales associées, nous obtenons :

$$(m | G | m') = \frac{1}{is} \langle m | H_0 - H | m' \rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{(|m^{(1)}>\dots|m^{(n)}>)\neq|m>} \frac{1}{is} \langle m | H_0 - H | m^{(n)} \rangle \frac{1}{is} \dots \langle m^{(1)} | H_0 - H | m' \rangle \right\}$$

A partir des fonctions totales, on peut définir une matrice dont les éléments ont pour expression :

$$(2,5) \quad \langle m | U_T(s) | m' \rangle = is(m | G | m')$$

et qui sont donc définis par le développement :

$$(3,5) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle m | U_T(s) | m' \rangle = & \langle m | H_0 - H | m' \rangle + \\ & \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{(|m^{(1)}>\dots|m^{(i)}>)\neq|m>} \frac{1}{is} \dots \frac{1}{is} \langle m^{(1)} | H_0 - H | m' \rangle \right\} \end{aligned} \right.$$

La sommation portant sur tous les états intermédiaires différents de l'état final $|m>$.

Les éléments de matrice sont des fonctions de la variable complexe s . Une telle définition des éléments de matrice nous permet d'écrire l'image de l'amplitude de probabilité de l'état $|m>$ à l'instant t sous la forme :

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha(m, s) = & \frac{1}{s + i} \langle m | U_T(s) | m \rangle \\ & \left\{ \sum_{|m'>\neq|m>} \langle m | U_T | m' \rangle \frac{\alpha(m', 0)}{is} + \alpha(m, 0) \right\} \end{aligned} \right.$$

On peut montrer facilement que si l'on prend pour fonction de base, les solutions propres de l'hamiltonien non perturbé H_0 où l'on a :

$$H_0 \Psi_m = v_m \Psi_m$$

les amplitudes relatives aux états Ψ_m de l'équation (II) prennent la forme :

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(m, s) = \frac{1}{s + iv_m - i} \langle m | U(s) | m \rangle \\ \left\{ \sum_{|m' \rangle \neq |m \rangle} \langle m | U(s) | m' \rangle \frac{a'(m', o)}{v_{m'} - is} + a(m, o) \right\} \end{array} \right.$$

où les éléments de matrice sont définis par :

$$\langle m | U | m' \rangle = (v_m - is) \langle m | G | m' \rangle,$$

soit :

$$\begin{aligned} \langle m | U | m' \rangle = & \langle m | H | m' \rangle \\ & + \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \sum_{(|m^{(1)} \rangle \dots |m^{(i)} \rangle) \neq |m \rangle} \langle m | H | m^{(i)} \rangle \frac{1}{v_m^{(i)} - is} \right. \\ & \left. \langle m^{(i)} | H | m^{(i-1)} \rangle \dots \frac{1}{v_m^{(i)} - is} \langle m^{(1)} | H | m' \rangle \right\} \end{aligned}$$

Les formes (III) et (IV) sont les solutions brutes des équations de perturbation ; lorsque l'hamiltonien de perturbation ne contient pas d'opérateurs de création ou d'annihilation, elles représentent les amplitudes de probabilité de la fonction d'onde du système matériel développé au moyen d'une base complète orthonormée $|m \rangle$.

Lorsque l'interaction consiste en des créations et annihilations de particules, l'élément de matrice $\langle m | U_r | m' \rangle$ contient lorsque l'état du champ est différent en $|m \rangle$ et $|m' \rangle$, des opérateurs agissant sur la fonction d'état du champ tandis que la partie diagonale $\langle m | U_r | m \rangle$ n'en contient pas.

Nous ferons correspondre à chaque fonction totale irréductible associée à la création (ou à l'annihilation) d'un nombre n de particules du champ une matrice définie par :

$$(5,5) \quad \langle m'_{j+n} | U_{nr} | m_j \rangle = is \langle m'_{j+n} | G_n | m_j \rangle.$$

Avec une telle définition :

$$(6,5) \quad \langle m | U_r | m \rangle = \langle m | U_{0r} | m \rangle$$

puisque les états initial et final sont identiques.

U_{0r} traduit une interaction due à l'ensemble des processus d'échange des particules du champ.

Une telle définition des éléments de matrice nous permet d'obtenir

une décomposition des éléments non diagonaux de U_T , décrivant les émissions et absorptions de particules; il suffit de transcrire les relations obtenues au moyen des fonctions associées.

EMISSION D'UNE PARTICULE. — Partons d'un état initial ne contenant aucune particule du champ; dans l'état final $|m_1\rangle$, le système se trouve dans un état $|p_1\rangle$ et le champ possède une particule dans un état $|k_1\rangle$.

D'une manière générale, le système à l'instant initial est représenté par une superposition d'états, d'amplitude $a(m_0, o)$.

L'image de l'amplitude de probabilité de l'état $|m_1\rangle$ à l'instant t est fournie par la transposition de (6,4).

$$(7,5) \left\{ \begin{aligned} \alpha(m_1, s) &= \frac{1}{s + i} \overline{\langle m_1 | U_{0T}(s) | m_1 \rangle} \\ &\sum_{|p'_1\rangle, |p'_0\rangle} \left[\frac{\langle m_1 | U_{0T}(s) m'_1 \rangle (1 - \langle m_1 | m'_1 \rangle)}{is} + \langle m_1 | m'_1 \rangle \right] \\ &\cdot \langle m'_1 | U_{1T}(s) | m'_0 \rangle \frac{1}{is - \langle m'_0 | U_{0T}(s) | m'_0 \rangle} \\ &\cdot \left[\sum_{|p_0\rangle \neq |p'_0\rangle} \langle m'_0 | U_{0T}(s) | m_0 \rangle \frac{a(m_0, o)}{is} + a(m'_0, o) \right] \end{aligned} \right.$$

$$\text{où : } \begin{aligned} |m'_0\rangle &= |p'_0\rangle, & |m_0\rangle &= |p_0\rangle, \\ |m'_1\rangle &= |p'_1, k_1\rangle, & |m_1\rangle &= |p_1, k_1\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque l'on prend pour fonctions de base les solutions propres de H_0 , $\alpha(m_1, s)$ prend la forme :

$$(8,5) \left\{ \begin{aligned} \alpha(m_1, s) &= \frac{1}{s + i\nu_{m_1} - i} \overline{\langle m_1 | U_0 | m_1 \rangle} \\ &\sum_{|p'_1\rangle, |p'_0\rangle} \left\{ \frac{\langle m_1 | U_0 | m'_1 \rangle (1 - \langle m_1 | m'_1 \rangle)}{\nu_{m'_1} - is} + \langle m_1 | m'_1 \rangle \right\} \\ &\cdot \langle m'_1 | U_1 | m'_0 \rangle \frac{1}{\nu_{m'_0} - is - \langle m'_0 | U_0 | m'_0 \rangle} \\ &\left[\sum_{|p_0\rangle \neq |p'_0\rangle} \frac{\langle m'_0 | U_0 | m_0 \rangle a(m_0, o)}{\nu_{m_0} - is} + a(m'_0, o) \right] \end{aligned} \right.$$

où l'on définit U_n de G_n par la relation :

$$(9,5) \left\{ \begin{aligned} \langle m'_{j+n} | U_n | m_j \rangle &= (\nu_{m'_{j+n}} - is) \langle m'_{j+n} | G_n | m_j \rangle \\ |m_{j+n}\rangle &= |p_{j+n}, k_{j+n}\rangle. \end{aligned} \right.$$

$\nu_{m_{j+n}}$ se composant de l'énergie $\nu_{p_{j+n}}$ du système matériel augmenté de l'énergie du champ (contenant $j+n$ particules) dans un état $|k_{j+n}\rangle$.

EMISSION DE PLUSIEURS PARTICULES. — On obtient les expressions des amplitudes $\alpha(m_n, s)$ en transposant les expressions données par la méthode de résolution, compte tenu de la définition des éléments de matrice de $U_n(s)$.

L'émission de deux particules conduira à une amplitude $\alpha(m_2, s)$ transposée de l'expression (8,4) à l'aide des éléments de matrice de $U_0(s)$, $U_1(s)$ et $U_2(s)$.

PROPRIÉTÉS DES ÉLÉMENTS DE MATRICE DE $U(s)$. — De l'hermiticité de l'hamiltonien résultent des propriétés importantes pour les éléments de matrice de $U(s)$.

La relation d'hermiticité s'écrit :

$$\langle m' | H_0 - H | m \rangle = \langle m | H_0 - H | m' \rangle^*.$$

Considérons une suite d'états successifs :

$$| m_i \rangle, | m^{(1)} \rangle, \dots, | m^{(n)} \rangle, | m'_i \rangle$$

conduisant d'un état $| m_i \rangle$ à un état $| m'_i \rangle$ contenant le même nombre de particules du champ, et faisons lui correspondre la suite inverse :

$$| m'_i \rangle, | m^{(n)} \rangle, \dots, | m^{(1)} \rangle, | m_i \rangle$$

correspondant à l'une des possibilités de passage de $| m'_i \rangle$ à $| m_i \rangle$. Du fait de l'hermiticité des éléments de matrice :

$$\begin{aligned} \langle m'_i | H_0 - H | m^{(n)} \rangle &= \langle m^{(n)} | H_0 - H | m^{(n-1)} \rangle \dots \\ &= \langle m^{(1)} | H_0 - H | m_i \rangle = [\langle m_i | H_0 - H | m^{(1)} \rangle \\ &= \langle m^{(1)} | H_0 - H | m^{(2)} \rangle \dots \langle m^{(n)} | H_0 - H | m'_i \rangle]^* \end{aligned}$$

On a donc aussi :

$$\begin{aligned} \langle m'_i | H_0 - H | m^{(n)} \rangle &= \frac{1}{-is} \langle m^{(n)} | H_0 - H | m^{(n-1)} \rangle \dots \\ &= \frac{1}{-is} \langle m^{(1)} | H_0 - H | m_i \rangle \dots \\ &= [\langle m_i | H_0 - H | m^{(1)} \rangle \frac{1}{is} \dots \frac{1}{is} \langle m^{(n)} | H_0 - H | m'_i \rangle] \end{aligned}$$

où la barre désigne la fonction imaginaire conjuguée de s .

Cette égalité étant vérifiée pour chaque terme figurant dans la somme définissant les éléments de matrice de $U_{0T}^0(s)$, obtenu à partir de G_0^0 par une relation analogue à (5,5) et un développement (3,5), il en résulte que :

$$(10,5) \quad \langle m'_i | U_{0T}^0(s) | m_i \rangle = \overline{\langle m_i | U_{0T}^0(-s) | m'_i \rangle}.$$

Cette relation reste valable pour les éléments de matrice de $U_0^0(s)$ défini à partir de G_0^0 par (9,5). Elle n'est plus exacte pour les éléments non diagonaux de U_{0T} et U_0 du fait de l'exclusion de l'état final comme

état intermédiaire, mais elle reste vraie pour les éléments diagonaux :

$$(11,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle m_i | U_{0T}(s) | m_i \rangle = \langle \overline{m_i} | U_{0T}(-s) | \overline{m_i} \rangle \\ \langle m_i | U_{0I}(s) | m_i \rangle = \langle \overline{m_i} | U_{0I}(-s) | \overline{m_i} \rangle. \end{array} \right.$$

Faisant : $s = -i\varepsilon$.

$$(12,5) \quad \langle m'_i | U_{0T}^0(-i\varepsilon) | m_i \rangle = \langle m_i | U_{0T}^0(-i\varepsilon) | m_i \rangle^*$$

l'opérateur $U_{0T}^0(-i\varepsilon)$ est donc hermitique et ses éléments diagonaux réels, il en est de même pour $U_{0I}^0(-i\varepsilon)$.

La relation :

$$\langle m_i | U_{0T}(-i\varepsilon) | m_i \rangle = \langle m_i | U_{0T}(-i\varepsilon) | m_i \rangle^*$$

montre que les éléments diagonaux de $U_{0T}(-i\varepsilon)$ sont réels, il en est de même pour $U_{0I}(-i\varepsilon)$.

Si l'on décompose les éléments diagonaux des opérateurs $U_{0T}(s)$, $U_{0I}(s)$, $U_{0T}^0(s)$ et $U_{0I}^0(s)$, en fonctions réelles et imaginaires de s , les relations précédentes montrent que chaque partie réelle est une fonction paire de s , tandis que chaque partie imaginaire est impaire.

Les relations $\langle m_{n+j} | U_n(s) | m_j \rangle = \langle \overline{m_j} | U_{-n}(-s) | \overline{m_{n+j}} \rangle$ (10,5 bis), où $U_{-n}(s)$ correspond à l'annihilation de n particules du champ se démontrent de la même manière et résultent du fait qu'il n'y a aucune exclusion pour les états intermédiaires du système matériel.

RELATIONS VÉRIFIÉES PAR LES ÉLÉMENTS DE MATRICE DE $U(s)$. — La transposition de l'équation (4,4) fournit des relations vérifiées par les éléments de matrice de $U_T(s)$ et $U(s)$.

$$(13,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle m' | U_T(s) | m \rangle = \langle m' | H_0 - H | m \rangle \\ \quad + \sum_{|m'' \neq m'} \langle m' | U_T(s) | m'' \rangle \frac{1}{is} \langle m'' | H_0 - H | m \rangle \\ \langle m' | U(s) | m \rangle = \langle m' | H | m \rangle \\ \quad + \sum_{|m'' \neq m'} \langle m' | U(s) | m'' \rangle \frac{1}{\sqrt{m''} - is} \langle m'' | H | m \rangle \end{array} \right.$$

ces éléments de matrice contiennent des opérateurs de création et d'annihilation lorsque l'état du champ est différent en $|m\rangle$ et $|m'\rangle$.

La transposition de l'équation (5,4) fournit les relations :

$$(14,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle m'_j | U_{0T}(s) | m_j \rangle = \langle m'_j | U_{0T}^0(s) | m_j \rangle \\ \quad + \sum_{|m''_j \neq m'_j} \langle m'_j | U_{0T}(s) | m''_j \rangle \frac{1}{is} \langle m''_j | U_{0I}^0(s) | m_j \rangle. \end{array} \right.$$

$$(15,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle m'_j | U_0(s) | m_j \rangle = \langle m'_j | U_0^0(s) | m_j \rangle \\ \quad + \sum_{|m''_j \neq m'_j} \langle m'_j | U_0(s) | m''_j \rangle \frac{1}{\sqrt{m''_j} - is} \langle m''_j | U_0^0(s) | m_j \rangle. \end{array} \right.$$

TRADUCTION DES GRAPHIQUES. — Chaque graphique exprime l'évolution d'un système à partir d'un état initial contenant un nombre défini de particules du champ. C'est une ligne brisée ayant son origine en un point d'ordonnée j_0 de la demi-droite positive $i = 0$, pour un état initial possédant j_0 particules du champ. L'extrémité du graphique se trouve au point représentatif de l'état final.

Pour exprimer la fonction associée à un graphique donné, on associe à chaque point représentatif d'ordonnée j une fonction :

$$| m_j > \frac{1}{v_{m_j} - is} < m_j | \quad \text{ou} \quad | m_j > \frac{1}{is} < m_j |$$

suivant que l'on prend pour fonction de base les solutions propres de l'hamiltonien non perturbé H_0 , ou une base quelconque. On associe d'autre part à chaque segment de droite situé entre deux points figuratifs successifs, l'hamiltonien responsable de la transition entre les deux états correspondants : H_+ lors de la création d'une particule, H_- lors de l'annihilation d'une particule et H_0 lorsqu'il n'y a pas de changement dans l'état du champ. On doit donc utiliser le signe — lorsque le graphique monte de droite à gauche, et + lorsqu'il descend. Pour obtenir la fonction traduisant l'évolution représentée par le graphique, on le parcourt de droite à gauche, en remplaçant chaque point intermédiaire et chaque segment par les expressions précédentes.

Nous allons tout d'abord montrer comment l'expression :

$$| m_j > \frac{1}{v_{m_j} - is} < m_j |$$

se déduit de l'expression :

$$| m_j > \frac{1}{is} < m_j |$$

lorsqu'on prend pour base les solutions propres de H_0 .

Dans la première expression, seul H_- est responsable des transitions, tandis que dans la seconde H_0 peut aussi en provoquer.

Regroupons donc tous les termes contenant H_0 , en tenant compte de ce que H_0 est diagonale dans la base de ses solutions propres, il reste :

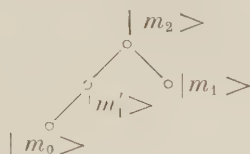
$$\begin{aligned} & | m_j > \frac{1}{is} < m_j | + | m_j > \frac{1}{is} < m_j | H_0 | m_j > \frac{1}{is} < m_j | + \dots \\ & + | m_j > \frac{1}{is} \left[\frac{< m_j | H_0 | m_j >}{is} \right]^n < m_j | + \dots \\ & = | m_j > \frac{1}{is - < m_j | H_0 | m_j >} < m_j | = - | m_j > \frac{1}{v_{m_j} - is} < m_j | \end{aligned}$$

tenant compte du signe — H dans l'équation (1), on retrouve bien le même résultat.

Ainsi lorsque l'hamiltonien de perturbation H exprime uniquement

la création ou l'annihilation de particules, l'utilisation comme base des fonctions propres de H_0 a pour effet de regrouper et de faire disparaître les transitions représentées par un segment de droite horizontal, seules subsistent des lignes brisées constituées de segments joignant deux points correspondant à des états successifs possédant un nombre différent de particules du champ.

Donnons pour exemple le cas du graphique suivant :



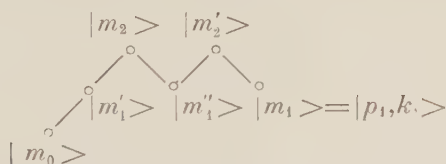
Il se traduit suivant les règles :

$$\langle m_1 | H_- | m_2 \rangle \frac{1}{\nu_{m_2} - i\epsilon} \langle m_2 | H_+ | m'_1 \rangle \frac{1}{\nu_{m'_1} - i\epsilon} \langle m'_1 | H_+ | m_0 \rangle.$$

ETATS CONTINUS. — Lorsque le spectre des états des particules du champ est continu, l'émission et l'annihilation d'une particule ne conduisent pas aux mêmes êtres mathématiques. Dans le premier cas, le système part d'un état déterminé pour aboutir à un état d'un spectre continu ; la transition conduit alors à une densité. Dans le second cas, le système matériel absorbe une particule existant précédemment dans le champ, une telle transition ne change pas le comportement mathématique de l'expression primitive, c'est l'analogue de la multiplication par un nombre.

L'émission d'une particule du champ suivie de sa réabsorption constitue donc une densité et seule l'intégration sur un intervalle fini continu de l'ensemble des états de la particule émise possède une réalité physique.

Cette remarque nous conduit à éliminer certains graphiques qui ne peuvent donner lieu à aucune contribution ; par exemple la création d'une particule du champ dans un état $|k_1\rangle$ représentée par le graphique :



en suivant les états intermédiaires :

$$|p'_1, k_1\rangle, \quad |p_2, k_2, k_1\rangle, \quad |p''_1, k_2\rangle, \quad |p'_2, k_2, k_1\rangle$$

une sommation portant sur les états intermédiaires $|p\rangle$ de la matière et sur ceux de la particule $|k_2\rangle$. Un tel graphique conduit à une densité double, tandis que l'amplitude de probabilité de l'état $|p_1, k_1\rangle$ est une densité simple, un tel processus ne donne donc aucune contribution au processus d'émission d'une particule.

D'une manière générale un graphique exprimant l'absorption suivie de la réémission d'une particule apparaissant dans l'état final n'apporte aucune contribution à la densité d'amplitude de probabilité.

L'émission de n particules est exprimée par une densité d'ordre n et un processus analogue au précédent conduisant à une densité d'ordre supérieur n'apporte aucune contribution.

NOYAU INTÉGRAL. — A chaque point représentatif d'un état intermédiaire possédant n particules du champ, nous avons fait correspondre l'expression :

$$|m_n\rangle \frac{1}{\nu_{m_n} - is} \langle m_n|.$$

Le calcul des fonctions U fait intervenir une sommation sur tous les états intermédiaires, et fait ainsi correspondre à chaque point représentatif un noyau intégral, obtenu en effectuant la sommation sur les états $|m_n\rangle$.

Dans ce noyau :

$$(16,5) \quad N_n(\vec{r}, \vec{r}', s) = \sum_{|m_n\rangle} |m_n\rangle \frac{1}{\nu_{m_n} - is} \langle m_n|$$

chaque état $|m_n\rangle$ est le produit d'un état du système matériel et d'une fonction définissant le nombre de particules du champ dans chaque état de la particule libre. Cette fonction n'intervient pour le calcul de $N(\vec{r}, \vec{r}', s)$ que dans l'énergie ν_{m_n} qui se compose de l'énergie du système matériel dans l'état $|p_n\rangle$ et de l'énergie ν_{k_n} du champ :

$$\nu_{m_n} = \nu_{p_n} + \nu_{k_n}.$$

Ainsi :

$$(17,5) \quad N_n(\vec{r}, \vec{r}', s) = N_0(\vec{r}, \vec{r}', s + i\nu_{k_n}).$$

$N_0(\vec{r}, \vec{r}', s)$ désignant le noyau en l'absence de particules du champ :

$$N_0(\vec{r}, \vec{r}', s) = \sum_{|m_0\rangle} |m_0\rangle \frac{1}{\nu_{m_0} - is} \langle m_0| = \sum_{|p\rangle} \Psi^p(\vec{r}) \frac{1}{\nu_p - is} \Psi_p^*(\vec{r}').$$

Ce noyau est solution d'une équation, obtenue en appliquant l'opérateur $(H_0 - is)$, en tenant compte de :

$$H_0 \Psi_p(\vec{r}) = \nu_p \Psi_p(\vec{r})$$

et de la définition de la fonction singulière :

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \sum_p \Psi_p(\vec{r}) \Psi_p^*(\vec{r}')$$

où :

$$(18,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \delta(\vec{r} - \vec{r}') f(\vec{r}) d\vec{r} = f(\vec{r}) \\ \int g(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r} = g^*(\vec{r}') \end{array} \right.$$

l'opérateur H_0 agissant sur $(\vec{r})$, il vient :

$$(19,5) \quad (H_0 - is) N_0(\vec{r}, \vec{r}', s) = \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Si $A(\vec{r})$ et $B(\vec{r})$ sont deux fonctions admettant respectivement pour matrice dans le système de base $|\rho\rangle$, $\|A_{pp'}\|$ et $\|B_{pp'}\|$ on doit avoir :

$$(20,5) \quad \sum_{|p''\rangle} \frac{A_{pp''} B_{p''p'}}{v_{p''} - is} = \int_{(\vec{r})} \int_{(\vec{r}')} \Psi_p^*(\vec{r}) A(\vec{r}) N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) B(\vec{r}') \Psi_{p'}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'$$

faisant $A \equiv B \equiv 1$:

$$\frac{\hat{\partial}_{pp'}}{v_{p'} - is} = \int_{(\vec{r})} \int_{(\vec{r}')} \Psi_p^*(\vec{r}) N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Psi_{p'}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'.$$

Il s'ensuit que :

$$(21,5) \quad \int_{(\vec{r}')} N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Psi_{p'}(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{\Psi_{p'}(\vec{r})}{v_{p'} - is}.$$

Donnons comme exemple le noyau relatif à l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m_0 :

$$(22,5) \quad N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) = \frac{m_0}{2\pi\hbar} \frac{e^{-\sqrt{\frac{2im_0}{\hbar}} s |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

D'une manière plus générale, le noyau relatif à une équation d'onde libre relativiste de la forme :

$$H_0 \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

pour une particule d'énergie au repos μ , a pour expression :

$$(23,5) \quad N_0(\vec{r}, \vec{r}', s) = \frac{1}{4\pi} (H_0 + is) \frac{e^{-|\vec{r} - \vec{r}'| \sqrt{\mu^2 + s^2}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

l'hamiltonien libre H_0 opérant sur la variable $(\vec{r})$.

Le noyau relatif à l'équation de Dirac dans une théorie sans trou s'obtient en posant :

$$H_0 = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta \mu$$

l'opérateur $\vec{\text{Grad}}$ contenu dans $\vec{p}$ agissant sur la variable $\vec{r}$. Connaissant le noyau $N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s)$, on obtient l'évolution de la fonction d'onde libre $\Phi(\vec{r}, s)$, à partir d'une fonction initiale $\Psi_0(\vec{r})$, sous la forme :

$$(24,5) \quad \Phi(\vec{r}, s) = -i \int_{(r')}^{\vec{r}} N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Psi_0(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

NOYAU DE FEYNMAN. — Avant d'étudier le noyau intégral auquel conduit la théorie des trous, nous devons établir un résultat préliminaire.

Considérons une fonction $f(t)$, nulle pour $t < 0$ et bornée pour $t > 0$. Elle admet une image $F(s)$ holomorphe dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 0$, situé à droite de l'axe imaginaire. Partant de $F(s)$, on retrouve l'original à l'aide de l'intégrale Bromwich :

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(z) e^{zt} dz.$$

Cherchons dans ces conditions l'original de l'image $F(-s)$ obtenu en changeant le signe de s .

Soit $g(t)$ l'original; on doit avoir :

$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(-z) e^{zt} dz = \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{s(-t)} ds.$$

On voit que si :

$$(25,5) \quad F(s) \subset f(t) \quad \text{alors} \quad F(-s) \subset f(-t).$$

Ainsi $F(-s)$ est l'image d'une fonction nulle pour $t > 0$ et égale à $f(-t)$ pour $t < 0$.

En théorie des trous on considère le vide comme formé par une « mer » d'électrons comblant tous les états possibles à énergies négatives, de telle sorte qu'un électron dans un état à énergie positive ne puisse, par suite du principe d'exclusion de Pauli, sauter, lors d'une perturbation, dans un état à énergie négative. Si l'on prend comme origine pour les grandeurs physiques s'attachant à un électron, cette « mer » d'états à énergie négative, ce qui revient à définir le vide par l'ensemble comblé des états à énergie négative; une lacune, un trou dans cette distribution, se présentera comme une particule possédant une énergie, une quantité de mouvement, un spin et une charge, opposés à celle de l'état inoccupé. Une transition entre états à énergie négative consistera donc en un saut d'un électron à énergie négative

dans un trou. L'état ainsi rendu libre représentera le nouvel état de la particule « trou ».

Séparons le noyau intégral de l'équation de Dirac, dans la théorie sans trou en deux parties :

$$N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) = N_+(\vec{r}, \vec{r}'; s) + N_-(\vec{r}, \vec{r}'; s)$$

où :

$$N_+(\vec{r}, \vec{r}'; s) = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} |p\rangle \\ \nu_p > 0 \end{array} \right\}} |p\rangle \frac{1}{\nu_p - is} \langle p|$$

tandis que :

$$N_-(\vec{r}, \vec{r}'; s) = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} |p'\rangle \\ \nu_{p'} < 0 \end{array} \right\}} |p'\rangle \frac{1}{\nu_{p'} - is} \langle p'|$$

ainsi N_+ se rapporte à tous les états à énergie positive, N_- à tous les états à énergie négative.

En théorie des trous, pour un électron à énergie positive ν_p , l'énergie totale se compose de l'énergie E_0 du vide et de l'énergie ν_p de l'électron soit :

$$E_0 + \nu_p.$$

Pour une lacune $|p'\rangle$ dans les états à énergie négative, l'énergie totale se compose de l'énergie du vide, diminuée de l'énergie de l'état inoccupé soit :

$$E_0 - \nu_{p'}.$$

Et l'on a :

$$N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} |p\rangle \\ \nu_p > 0 \end{array} \right\}} |p\rangle \frac{1}{E_0 + \nu_p - is} \langle p| + \sum_{\left\{ \begin{array}{l} |p'\rangle \\ \nu_{p'} < 0 \end{array} \right\}} |p'\rangle \frac{1}{E_0 - \nu_{p'} - is} \langle p'|.$$

Annulant l'énergie du vide et tenant compte des définitions de N_+ et N_- :

$$N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) = N_+(\vec{r}, \vec{r}'; s) - N_-(\vec{r}, \vec{r}'; s).$$

Si l'on appelle respectivement $K_0(\vec{r}, \vec{r}'; t)$, $K_+(\vec{r}, \vec{r}'; t)$ et $K_-(\vec{r}, \vec{r}'; t)$, les originaux de $N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s)$, $N_+(\vec{r}, \vec{r}'; s)$ et $N_-(\vec{r}, \vec{r}'; s)$:

$$(26,5) \quad K_0(\vec{r}, \vec{r}'; t) = \begin{cases} K_+(\vec{r}, \vec{r}'; t) & \text{pour } t > 0 \\ -K_-(\vec{r}, \vec{r}'; -t) & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

ce qui est bien conforme au résultat de Feynman : les lacunes dans les états à énergie négative rétrogradent dans le temps.

Pour obtenir l'évolution des états d'une lacune dans les états à énergie négative, il faut remarquer que l'état final, qui est l'état d'un des électrons à énergie négative, se trouve à droite de l'hamiltonien responsable de la transition tandis que l'état initial de la lacune, qui se trouve comblée après la transition est situé à sa gauche.

Si l'on appelle $H_1, H_2, \dots, H_n$, les hamiltoniens étiquetés de 1 à n dans l'ordre où ils opèrent au cours du temps et si $|m^{(1)}\rangle \dots |m^{(n-1)}\rangle$ désignent les états intermédiaires, $|m\rangle$ et $|m'\rangle$ les états initial et final de la lacune ; l'amplitude pour une telle suite de transition prend la forme :

$$\langle m^{(n-1)} | H_n | m' \rangle \frac{1}{v_{m^{(n-1)}} - i\epsilon} \dots \frac{1}{v_{m^{(2)}} - i\epsilon} \langle m^{(1)} | H_2 | m^{(2)} \rangle \\ \frac{1}{v_{m^{(1)}} - i\epsilon} \langle m | H_1 | m^{(1)} \rangle$$

où $v_{m^{(i)}}$ est l'énergie de l'état intermédiaire $|m^{(i)}\rangle$, qui se compose de l'énergie du vide E_0 (que l'on annule) diminuée de l'énergie de l'état inoccupé de la lacune et augmentée de l'énergie du système contenant la lacune. Si l'on inverse l'ordre des indices des états intermédiaires, on obtient après regroupement une expression :

$$(27,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle m | H_1 | m^{(n-1)} \rangle \frac{1}{v_{m^{(n-1)}} - i\epsilon} \langle m^{(n-1)} | H_2 | m^{(n-2)} \rangle \dots \\ \frac{1}{v_{m^{(1)}} - i\epsilon} \langle m^{(1)} | H_n | m' \rangle \end{array} \right.$$

qui fait apparaître les noyaux relatifs aux états à énergie négative. Comme ces noyaux traduisent l'évolution spatiale de la lacune, on voit que les hamiltoniens de perturbation H_i qui se présentent dans l'ordre inverse du temps, lors de l'évolution de la lacune, d'un état $|m'\rangle$ à un état $|m\rangle$, corroborent le fait que l'évolution des lacunes a lieu dans le sens des temps négatifs. Ainsi le sens de l'évolution des lacunes est l'inverse de celui des particules à énergie positive : l'annihilation d'une particule du champ doit précéder sa création.

Les échanges de particules du champ peuvent être de deux sortes :

1° la lacune absorbe le même ensemble de particules de telle sorte que seul l'état du champ et de la lacune change dans les états intermédiaires, les états initial et final du champ étant identiques. On obtient alors une expression donnant l'énergie propre due à la lacune ;

2° la lacune échange des particules du champ avec les constituants du système matériel. Cet échange donne lieu à une interaction entre la lacune et le système (par exemple l'échange de photons donne lieu à l'interaction de Coulomb augmentée d'un terme d'interaction de spin dû aux ondes transversales).

NOYAU INTÉGRAL DU SYSTÈME MATÉRIEL. — On peut regrouper en un seul terme les processus relatifs aux interactions dues à des échanges de particules du champ.

A ce groupement on associe le noyau :

$$(28,5) \quad \left\{ \begin{aligned} N_0(\vec{r}, \vec{r}'; s) &= \sum_{|p\rangle} |p\rangle \frac{1}{s + i\nu_p - i} \langle p | U_0 | p \rangle \\ &\left\{ \sum_{|p'\rangle \neq |p\rangle} \left[\frac{\langle p | U_0 | p'\rangle}{\nu_{p'} - is} + \langle p | p'\rangle \right] \langle p' | \right\} \end{aligned} \right.$$

que l'on peut calculer dès que l'on connaît l'expression des éléments de matrice de U_0 .

$N_{0T}(\vec{r}, \vec{r}'; s)$ se compose de deux parties :

$$1^0 \quad \sum_{|p\rangle} |p\rangle \frac{1}{s + i\nu_p - i} \langle p |$$

qui définit l'évolution de la fonction d'onde initiale lorsqu'il n'existe pas d'interaction.

$$2^0 \quad \sum_{|p\rangle, |p'\rangle} |p\rangle \frac{1}{s + i\nu_p - i} \langle p | U_0 | p'\rangle \frac{1}{\nu_{p'} - is} \langle p' |$$

qui décrit le changement, dû à la perturbation, dans l'évolution du système matériel.

CHAPITRE III

États stationnaires.

États stationnaires d'un système en interaction avec un champ. — Nous avons vu, lors de la traduction des graphiques, que l'utilisation comme base de l'ensemble des fonctions propres de l'hamiltonien non perturbé a pour effet de regrouper en un seul terme les transitions relatives à des états successifs sans changement d'état du champ. Nous allons de la même manière, chercher à regrouper les graphiques d'une façon plus complète de manière à tenir compte de l'interaction créée entre les constituants du système matériel par des échanges de particules du champ. Une telle interaction ne change pas l'état du champ puisque chaque particule créée est ensuite réabsorbée par le système. Comme exemple, citons l'interaction de Möller et la self énergie.

Une définition des états stationnaires tenant compte des interactions d'échanges de particules du champ aura pour effet de regrouper en un seul terme l'ensemble des graphiques représentant l'évolution du sys-

tème matériel en l'absence de changement d'état du champ entre des états initial et final.

Pour décrire l'évolution du système matériel, nous sommes parti d'un ensemble complet quelconque de fonctions $\varphi_p(\vec{r})$ orthonormées et nous avons obtenu pour image de l'amplitude de chaque composante $\varphi_p(\vec{r})$ relatif à une évolution sans changement d'état du champ (ne contenant aucune particule dans l'état initial) :

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha(p, s) &= \frac{1}{s + i} \langle p | U_{0T}(s) | p \rangle \\ &\left\{ \sum_{|p' \rangle \neq |p \rangle} \langle p | U_{0T}(s) | p' \rangle \frac{a(p', o)}{is} + a(p, o) \right\} \end{aligned} \right\}$$

Cherchons comment exprimer un état stationnaire et obtenir les énergies et fonctions propres du système à partir des $\alpha(p, s)$.

Supposant le problème résolu, on se donne les fonctions et énergies propres $\Psi_n(r)$ et ε_n du système avec perturbation. La fonction d'onde du système défini par la condition initiale :

$$\Psi(\vec{r}, o) = \sum_{|n \rangle} b(n, o) \Psi_n(\vec{r})$$

s'écrit sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{|n \rangle} b(n, o) \Psi_n(\vec{r}) e^{-i\varepsilon_n t}.$$

Les $\varphi_p(\vec{r})$ formant un système complet, on peut écrire :

$$\Psi_n(\vec{r}) = \sum_{|p \rangle} c_{np} \varphi_p(\vec{r})$$

où :

$$c_{np} = \int_{(r)} \Psi_n(\vec{r}) \varphi_p^*(\vec{r}) d\vec{r}.$$

$\Psi(\vec{r}, t)$ devient alors une somme double :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{|n \rangle} b(n, o) \left[\sum_{|p \rangle} c_{np} \varphi_p(\vec{r}) \right] e^{-i\varepsilon_n t}$$

intervertissant l'ordre des sommations, on obtient le développement de Ψ dans la base φ :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{|p \rangle} \left\{ \sum_{|n \rangle} b(n, o) c_{np} e^{-i\varepsilon_n t} \right\} \varphi_p(\vec{r}) = \sum_{|p \rangle} a(p, t) \varphi_p(\vec{r}).$$

Et la transformée de Laplace de $\alpha(p, t)$:

$$\alpha(p, s) = \sum_{|n\rangle} \frac{b(n, o) c_{np}}{s + i\epsilon_n}$$

montre que les pôles de $\alpha(p, s)$ fonction de la variable complexe s fournissent les énergies propres du système perturbé.

Prenant une répartition initiale des $\varphi_p(\vec{r})$ correspondant à un cas pur $|p_0\rangle$:

$$\alpha(p_0, s) = \frac{1}{s + i\epsilon_{p_0} |U_{0T}(s)| p_0\rangle}.$$

Les énergies propres ϵ_n sont donc racines de l'équation :

$$(1,6) \quad \epsilon - \langle p_0 | U_{0T}(-i\epsilon) | p_0 \rangle = 0$$

obtenue en remplaçant s par $-i\epsilon$ au dénominateur de $\alpha(p_0, s)$. Cette équation est réelle comme $\langle p_0 | U_{0T}(-i\epsilon) | p_0 \rangle$. Faisant $t = 0$, la distribution initiale :

$$\varphi_{p_0}(\vec{r}) = \sum_{|n\rangle} b(n, o) \Psi_n(\vec{r})$$

implique que $b(n, o) = c_{np_0}^*$ et :

$$\alpha(p, s) = \sum_{|n\rangle} \frac{c_{np_0}^* c_{np}}{s + i\epsilon_n}.$$

Si aucun c_{np} n'est nul, chaque $\Psi_n(r)$ contient toutes les composantes $\varphi_p(r)$, et $\alpha(p, s)$ contient tous les pôles relatifs aux énergies propres quel que soit $|p\rangle$.

L'équation $\epsilon - \langle p | U_0(-i\epsilon) | p \rangle = 0$ possédera donc la même série de racines quel que soit $|p\rangle$. Il en résulte que la partie qui est dans l'accolade de (III) est une fonction ne possédant aucun pôle sur l'axe imaginaire $R(s) = 0$. Comme d'autre part $\alpha(p, s)$ est holomorphe pour $R(s) > 0$, l'accolade est holomorphe dans le demi-plan $R(s) \geq 0$.

La fonction $U_{0T}(s)$ se prête mal à la définition des fonctions stationnaires du fait que, d'une part, elle dépend de la base utilisée (l'état final doit être omis comme état intermédiaire), d'autre part, elle n'est pas hermitique. La matrice $\langle p' | U_{0T}(s) | p \rangle$ n'est donc pas non plus hermitique.

Cependant, nous avons à notre disposition une fonction $U_{0T}^0(s)$ liée à $U_{0T}(s)$ par la relation :

$$(V) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle p' | U_{0T}(s) | p \rangle &= \langle p' | U_{0T}^0(s) | p \rangle \\ &+ \sum_{|p'' \neq p\rangle} \langle p' | U_{0T}(s) | p'' \rangle \frac{1}{is} \langle p'' | U_{0T}^0(s) | p \rangle \end{aligned} \right.$$

qui est hermitique et ne dépend pas de la base utilisée dans son calcul, puisque l'on effectue une sommation sur tous les états intermédiaires du système matériel.

Nous sommes ainsi amené à définir comme états stationnaires ceux qui rendent la matrice $\langle p' | U_{01}^0(s) | p \rangle$ diagonale et dont les énergies propres ε_p vérifient :

$$\varepsilon_p = \langle p | U_{0T}^0(-i\varepsilon_p) | p \rangle.$$

Il peut être indiqué, lorsque la correction à la valeur propre de H_0 est petite, de chercher à obtenir les énergies propres par une méthode de perturbation, on peut développer par exemple $\Psi_p(\vec{r})$ en série de fonctions propres de H_0 :

$$\Psi_p(\vec{r}) = \sum_{|m\rangle} a_m \varphi_m(\vec{r}) \quad \text{où} \quad H_0 \varphi_m(\vec{r}) = \nu_m \varphi_m(\vec{r}).$$

ε_p doit alors vérifier l'équation de perturbation :

$$(2,6) \quad (\nu_m - \varepsilon_p) a_m = \sum_{|m'\rangle} \langle m | U_0^0(-i\varepsilon_p) | m' \rangle a_{m'}.$$

On obtient les énergies propres ε_p en écrivant que le déterminant de l'équation linéaire et homogène en a est nul ;

ε_p doit donc annuler le déterminant dont les éléments diagonaux ont pour valeur :

$$\varepsilon_p - \nu_{m_i} + \langle m_i | U_0^0(-i\varepsilon_p) | m_i \rangle$$

et les éléments non diagonaux :

$$\langle m'_i | U_0^0(-i\varepsilon_p) | m_i \rangle.$$

Nous reportant à la relation (V), on voit que dans la base des fonctions propres $|p\rangle$, les deux matrices de U_{0T}^0 et U_{01} sont simultanément diagonales et que :

$$(3,6) \quad \langle p | U_{0T}(s) | p \rangle = \langle p | U_{01}^0(s) | p \rangle.$$

Les états ainsi définis représentent des états stationnaires du système nu, c'est-à-dire que l'on n'y tient pas compte du « nuage » de particules du champ qui baigne le système matériel. Par contre, il y est tenu compte des interactions d'échange des particules du champ et de la self énergie.

Dans l'expression (III) pour un temps suffisamment grand, c'est-à-dire lorsque s est suffisamment voisin du pôle $-i\varepsilon_p$, $\alpha(p, s)$ se comporte approximativement comme :

$$\frac{\alpha(p, 0)}{s + i\varepsilon_p}$$

lorsque la quantité $\frac{d}{ds} \langle p | U_0(s) | p \rangle$ est négligeable par rapport à 1 au voisinage de ce pôle.

Equation d'onde des états stationnaires. — La fonction $A(m_0)$ associée à l'ensemble des processus où l'état du champ reste inchangé vérifie l'équation :

$$(10,4) \quad A(m_0) = A_0(m_0) + \sum_{|m'_0\rangle} \langle m_0 | G_0^0 | m'_0 \rangle A(m'_0)$$

pour une distribution initiale $A_0(m_0)$ des états $|m_0\rangle$. Lorsque l'on applique cette relation à la résolution des équations de perturbation, $A(m_0)$ représente l'amplitude $\alpha(m_0, s)$ de l'état $|m_0\rangle$, $A_0(m_0)$ l'évolution de cette amplitude en l'absence de perturbation, ainsi :

$$A(m_0) = \alpha(m_0, s) \quad A_0(m_0) = \frac{a(m_0, 0)}{s + i\nu_{m_0}}$$

tandis que nous avons posé :

$$(4,5) \quad \langle m_0 | G_0^0 | m'_0 \rangle = \frac{\langle m_0 | U_0^0(s) | m'_0 \rangle}{\nu_{m_0} - is}$$

$\alpha(m_0, s)$ est donc solution de l'équation intégrale :

$$\alpha(m_0, s) = \frac{a(m_0, 0)}{s + i\nu_{m_0}} + \sum_{|m'_0\rangle} \frac{\langle m_0 | U_0^0(s) | m'_0 \rangle}{\nu_{m_0} - is} \alpha(m'_0, s).$$

Tenant compte de la décomposition :

$$\Phi(\vec{r}, s) = \sum_{|m_0\rangle} \alpha(m_0, s) |m_0\rangle$$

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_{|m_0\rangle} \alpha(m_0, 0) |m_0\rangle$$

de la fermeture de la base $|m_0\rangle$ des fonctions propres de H_0 et désignant par $U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s)$ une fonction telle que :

$$\langle m_0 | U_0^0(s) | m'_0 \rangle = \int \int \Psi_{m_0}^*(\vec{r}) U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Psi_{m'_0}(\vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}'.$$

$\Phi(\vec{r}, s)$ doit être solution de l'équation d'onde :

$$(4,6) \quad (H_0 - is)\Phi(\vec{r}, s) - \int_{(i')} U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Phi(\vec{r}', s) d\vec{r}' = -i\Psi_0(\vec{r}, 0).$$

A partir de sa définition, on obtient $U_0^0(\vec{r}, \vec{r}', s)$ sous la forme :

$$(5,6) \quad \left\{ \begin{aligned} U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s) &= V(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{|m^{(1)}\rangle \dots |m^{(2n+1)}\rangle} H(\vec{r}) |m^{(2n+1)}\rangle \frac{1}{v_{m^{(2n+1)}} - is} \right. \\ &\left. \langle m^{(2n+1)} | H | m^{(2n)} \rangle \frac{1}{v_{m^{(2n)}} - is} \dots \frac{1}{v_{m^{(1)}} - is} \langle m^{(1)} | H(\vec{r}') \right\} \end{aligned} \right.$$

où $V(r)$ désigne un potentiel réel ne contenant aucun opérateur d'émission ou d'absorption (par exemple le potentiel de Coulomb pour le cas d'un électron dans un champ de force coulombien, lorsque l'on prend les fonctions libres comme base).

On vérifie la relation :

$$(6,6) \quad \overline{U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; -s)} = U_0^0(\vec{r}, \vec{r}', s)$$

qui est valable pour chaque terme du développement.

Décroissance au cours du temps de la densité $\Psi^* \Psi$. — Pour étudier la variation de la densité $\Psi^* \Psi$ au cours du temps, nous allons chercher l'image de sa dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}.$$

Nous avons vu que l'image d'un produit de deux fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$ dont on connaît les images respectives $F_1(s)$, $F_2(s)$ est donnée par l'intégrale :

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) F_2\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon\right) d\varepsilon.$$

L'image de $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ s'obtient en partant de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \supset s \Phi(\vec{r}, s) - \Psi_0(\vec{r}, 0) = -iH_0 \Phi(\vec{r}, s) + i \int U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Phi(\vec{r}', s) d\vec{r}'$$

celle de $\frac{\partial}{\partial t} (\Psi^* \Psi)$ en additionnant :

$$\begin{aligned} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} &\supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Phi(\vec{r}, \frac{s}{2} + i\varepsilon)} \\ &\left\{ -iH_0 \Phi(\vec{r}, \frac{s}{2} - i\varepsilon) + i \int U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; \frac{s}{2} - i\varepsilon) \Phi(\vec{r}', \frac{s}{2} - i\varepsilon) d\vec{r}' \right\} d\varepsilon \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &\supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\vec{r}, \frac{s}{2} - i\varepsilon) \\ &\left\{ iH_0 \overline{\Phi(\vec{r}, \frac{s}{2} + i\varepsilon)} - \int U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; \frac{s}{2} + i\varepsilon) \overline{\Phi(\vec{r}', \frac{s}{2} + i\varepsilon)} d\vec{r}' \right\} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Intégrant sur l'espace et désignant par $\langle \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) |$ l'imaginaire conjugué de $\Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon)$ en y considérant s comme réel, tenant compte de l'hermiticité de H_0 :

$$\langle \Phi(\frac{s}{2} + i\varepsilon) | H_0 | \Phi(\frac{s}{2} + i\varepsilon) \rangle = \langle \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) | H_0 | \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) \rangle$$

et de la relation :

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\frac{s}{2} + i\varepsilon) | U_0^0(\frac{s}{2} + i\varepsilon) | \Phi(\frac{s}{2} + i\varepsilon) \rangle \\ = \langle \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) | U_0^0(-\frac{s}{2} - i\varepsilon) | \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) \rangle. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \Psi \rangle = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) | U_0^0(\frac{s}{2} - i\varepsilon) \\ + U_0^0(-\frac{s}{2} - i\varepsilon) | \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) \rangle d\varepsilon \end{aligned}$$

décomposant U_0^0 en deux fonctions réelles E et Λ :

$$U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; \frac{s}{2} - i\varepsilon) = E(\vec{r}, \vec{r}'; \varepsilon, s) + \frac{i}{2} \Lambda(\vec{r}, \vec{r}'; \varepsilon, s)$$

on fait apparaître un potentiel complexe.

Tenant compte du fait que E et Λ sont respectivement fonctions paire et impaire de s :

$$(7,6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi | \Psi \rangle \\ = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) | \Lambda(\vec{r}, \vec{r}'; \varepsilon, s) | \Phi(\frac{s}{2} - i\varepsilon) \rangle d\varepsilon \end{aligned} \right.$$

$\langle \Psi | \Psi \rangle$ ne se conserve au cours du temps que si Λ est nul. Ceci tient au fait que le système peut évoluer en émettant des particules du champ, et que la fonction Φ représente l'état du système nu (ne contenant aucune particule du champ). $\langle \Psi | \Psi \rangle$ ne se conserve au cours du temps que pour un état Φ à partir duquel il ne peut y avoir d'émission de particules, c'est-à-dire pour un état stationnaire fondamental du système.

Définition des états quasi stationnaires. — La fonction $\Phi(\vec{r}, s)$ définit l'évolution du système nu à partir d'une fonction d'onde initiale $\Psi_0(\vec{r}, 0)$. Pour obtenir la description d'un état quasi stationnaire, nous allons décomposer $\Phi(\vec{r}, s)$ en un produit de deux fonctions : l'une $\Psi_p(r)$ fonction uniquement des variables d'espace, l'autre fonction uniquement de s , et nous poserons :

$$(8,6) \quad \Phi_p(\vec{r}, s) = \frac{\Psi_p(\vec{r})}{s + iu_p(s)}$$

avec :

$$\Psi_0(\vec{r}, 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi(\vec{r}, s) = \Phi_p(\vec{r})$$

où $\frac{u_p(s)}{s}$ est une fonction bornée de s .

Portant dans l'équation d'onde, $\Psi_p(\vec{r})$ et $u_p(s)$ doivent être solution de :

$$(9,6) \quad H_0 \Psi_p(\vec{r}) - \int_{(\vec{r}')} U_0^0(\vec{r}, \vec{r}'; s) \Psi_p(\vec{r}') d\vec{r}' = u_p(s) \Psi_p(\vec{r}).$$

Les fonctions propres $\Psi_p(\vec{r})$ et valeurs propres $u_p(s)$ doivent être telles que $\Psi_p(\vec{r})$ soit de carré sommable, on pourra ainsi normer $\Psi_p^* \Psi_p$. Lorsque U_0^0 ne dépend pas de s (comme dans le cas où la perturbation est un potentiel $V(\vec{r})$), on retombe sur la définition classique des états stationnaires, où la constante u_p , indépendante de s , représente l'énergie propre de l'état Ψ_p .

Il existe entre $u_p(s)$ et $\overline{u_p(-s)}$ une relation analogue à celle qui a lieu pour $U_0^0(s)$. Multipliant (9,6) à gauche par $\Psi_p(r)$ et intégrant sur l'espace :

$$\begin{cases} \langle p | H_0 | p \rangle - \langle p | U_0^0(s) | p \rangle = u_p(s) \\ \langle p | H_0 | p \rangle - \langle p | U_0^0(-s) | p \rangle = \overline{u_p(-s)} \end{cases}$$

du fait des relations :

$$(10,6) \quad \begin{cases} \langle p | H_0 | p \rangle = \langle p | H_0 | p \rangle \\ \langle p | U_0^0(-s) | p \rangle = \langle p | U_0^0(s) | p \rangle \end{cases}$$

on obtient :

$$(11,6) \quad \overline{u_p(-s)} = u_p(s).$$

La base formée par l'ensemble des fonctions Ψ_p est orthogonale ; en effet, soient deux fonctions propres $|p\rangle$ et $|p'\rangle$ solutions de (9,6) ayant des valeurs propres différentes $u_p(s)$ et $u_{p'}(s)$. Formant les éléments de matrice et prenant l'imaginaire conjugué après changement de s en $-s$ pour la fonction propre $|p'\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle p' | H_0 | p \rangle - \langle p' | U_0^0(s) | p \rangle &= u_p(s) \langle p' | p \rangle \\ \langle p | H_0 | p' \rangle - \langle p | U_0^0(-s) | p' \rangle &= \overline{u_{p'}(-s)} \langle p | p' \rangle \end{aligned}$$

du fait des relations (10,6) (11,6) et de $\langle p | p' \rangle = \langle p' | p \rangle$, la seconde équation devient :

$$\langle p' | H_0 | p \rangle - \langle p' | U_0^0(s) | p \rangle = u_{p'}(s) \langle p' | p \rangle$$

retranchant de la première :

$$(12,6) \quad [u_p(s) - u_{p'}(s)] < p' | p > = 0$$

comme u_p et $u_{p'}$ sont différents, $|p >$ et $|p' >$ sont bien orthogonales.

Ayant défini la base des fonctions propres orthonormées $\Psi_p(\vec{r})$, on peut développer la fonction d'onde initiale $\Psi_0(\vec{r}, 0)$ sous la forme :

$$\Psi_0(\vec{r}, 0) = \sum_{|p >} a_p \Psi_p(\vec{r}).$$

La fonction $\Phi(\vec{r}, s)$ solution de (4,6) prend alors la forme :

$$(13,6) \quad \Phi(\vec{r}, s) = \sum_{|p >} a_p \frac{\Psi_p(\vec{r})}{s + i u_p(s)}$$

où les a_p sont des constantes. Du fait que $\Psi_0(\vec{r}, 0)$ est normé, on a :

$$\sum_{|p >} a_p^* a_p = 1.$$

On peut ainsi interpréter la quantité $\frac{a_p}{s + i u_p(s)}$ comme image de l'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état $|p >$ à l'instant t .

Energie propre. — Si l'on décompose $u_p\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right)$ en fonctions réelle et imaginaire de s :

$$(14,6) \quad u_p\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) = \varepsilon_p(\varepsilon, s) - \frac{i}{2} \lambda_p(\varepsilon, s)$$

la relation (11,6) :

$$\overline{u_p\left(-\frac{s}{2} + i\varepsilon\right)} = u_p^*\left(-\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) = u_p\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right)$$

où l'étoile désigne l'imaginaire conjugué lorsque l'on considère s comme réel, implique que :

$$(15,6) \quad \varepsilon_p(\varepsilon, s) - \frac{i}{2} \lambda_p(\varepsilon, s) = \varepsilon_p(\varepsilon, -s) + \frac{i}{2} \lambda_p(\varepsilon, -s).$$

ε_p est donc une fonction paire de s , tandis que λ_p est impaire. D'ailleurs pour $s = 0$, $u_p(-i\varepsilon)$ est réel.

L'énergie propre est obtenue comme pôle de la fonction d'onde, il faut donc chercher à annuler $s + i u_p(s)$.

La fonction $\lambda_p(s)$ possède une discontinuité le long de la droite $R(s) = 0$, elle subit un saut en traversant cette droite; d'autre part,

elle est du signe de $R(s)$ dans son voisinage. Un pôle ne peut donc être obtenu que sur la droite $R(s) = 0$, sur laquelle $\lambda(s) = 0$. Il fournit l'énergie propre ε_p comme solution de :

$$(16,6) \quad \varepsilon_p - u_p(-i\varepsilon_p) = 0$$

soit encore :

$$\varepsilon_p - \varepsilon_p(\varepsilon_p, 0) = 0.$$

Partant de l'équation des états stationnaires et isolant les parties réelle et imaginaire :

$$(17,6) \quad \begin{cases} \varepsilon_p(\varepsilon, s) = \langle p | H_0 | p \rangle - \langle p | E(\varepsilon, s) | p \rangle \\ \lambda_p(\varepsilon, s) = \langle p | \Lambda(\varepsilon, s) | p \rangle. \end{cases}$$

$\varepsilon_p(\varepsilon, s)$ se compose de deux parties : la première, indépendante de s , provient de l'ensemble des opérateurs indépendants de s contenus dans $U_{0r}^0(s)$, la seconde provient des interactions d'échange de particules du champ, et éventuellement d'une partie d'hamiltonien dépendant du temps. Lorsque les interactions d'échange de particules sont petites, le terme dépendant de s est lui-même petit, et $\varepsilon_p(\varepsilon, s)$ reste sensiblement constant.

Etats stationnaires du système matériel en présence de particules du champ. — Prenons un état initial contenant n particules du champ dans des états donnés, et cherchons à tenir compte, dans la définition des états stationnaires, de l'interaction due à l'échange de particules du champ entre les constituants du système matériel. Choissant pour base dans le calcul de $U_{01}(s)$, les fonctions propres de H_0 , on élimine les graphiques possédant des segments horizontaux, et l'on obtient la fonction $U_0(s)$.

Parmi les états intermédiaires possibles, il en existe dont le point représentatif se trouve sur la droite $j = n$; les états du champ y sont identiques ou différents de l'état initial, mais possèdent n particules.

L'ensemble des états des particules du champ étant continu, le second cas n'apporte aucune contribution à $U_0(s)$, le graphique traduisant une telle évolution possède en effet l'absorption suivie de la réémission d'une partie des particules dans l'un des états des n particules de l'état initial. Un tel graphique se traduit par une densité, et la sommation sur les états n'ayant pas lieu, la contribution est nulle.

Il s'ensuit que :

1° l'ensemble des graphiques possédant des points représentatifs situés au-dessous de la droite $j = n$ n'apporte aucune contribution à $U_0(s)$;

2° l'ensemble des graphiques situés au-dessus de la droite $j = n$ est identique à l'ensemble des graphiques situés au-dessus de la droite $j = 0$ pour un état initial ne comportant aucune particule du champ.

Ainsi les états stationnaires du système matériel sont définis indépendamment de l'état initial du champ.

On peut dire que l'on a défini les états stationnaires du système nu, puisque ce sont les états stationnaires du système matériel en l'absence de particules du champ dans l'état initial.

Les états intermédiaires de U_{0T} apportant une contribution aux états stationnaires du système étant tous situés au-dessus de la droite $j = n$ passant par le point figuratif de l'état initial $|m_n\rangle = |p, k_n\rangle$, l'énergie d'un état intermédiaire $|m_q\rangle$ se compose de l'énergie $\nu_{m(q-n)}$ que posséderait l'état correspondant au même graphique pour un état initial $|p\rangle$ ne comportant pas de particule du champ dans l'état initial, augmenté de l'énergie initiale ν_{k_n} du champ.

U_{0T} comportant une sommation sur ces états intermédiaires satisfait à la relation :

$$(18.6) \quad \langle m | U_{0T}(s) | m_n \rangle = \langle p | U_{0T}^{\text{mat}}(s + i\nu_{k_n}) | p \rangle + \nu_{k_n}.$$

La fonction U_{0T} relative à un état initial du champ possédant une énergie ν_{k_n} s'obtient à partir de la fonction U_{0T}^{mat} relative à l'absence de particule du champ dans l'état initial, en remplaçant s par $s + i\nu_{k_n}$ et en ajoutant l'énergie du champ dans l'état initial.

Pour la même raison :

$$\langle m_n | U_0(s) | m_n \rangle = \langle p | U_0(s + i\nu_{k_n}) | p \rangle.$$

$U_0(s)$ n'opérant que sur la matière du fait que nous avons déjà isolé $H_0 = H_0^{\text{mat}} + H_0^{\text{champ}}$.

Comme pour les éléments non diagonaux $\langle m'_n | H_0^{\text{champ}} | m_n \rangle$ est nul :

$$\begin{aligned} \langle m'_n | U_{0T}(s) | m_n \rangle &= \langle p' | U_{0T}^{\text{mat}}(s + i\nu_{k_n}) | p \rangle \\ \langle m'_n | U_0(s) | m_n \rangle &= \langle p' | U_0(s + i\nu_{k_n}) | p \rangle \end{aligned}$$

où :

$$|m'_n\rangle = |p', k_n\rangle \quad |m_n\rangle = |p, k_n\rangle.$$

Les états stationnaires en présence d'un champ initial $|k_n\rangle$ rendent diagonale la matrice :

$$\langle m'_n | \varepsilon - U_{0T}(-i\varepsilon) | m_n \rangle.$$

Ils sont donc solution de :

$$(19.6) \quad \begin{cases} \langle p' | U_{0T}[-i(\varepsilon - \nu_{k_n})] | p \rangle = 0 \\ (\varepsilon - \nu_{k_n}) - \langle p | U_{0T}^{\text{mat}}[-i(\varepsilon - \nu_{k_n})] | p \rangle = 0. \end{cases}$$

Les valeurs propres ε de ces équations représentent l'énergie totale, somme de l'énergie $(\varepsilon - \nu_{k_n})$ du système matériel et de l'énergie ν_{k_n} du champ.

CHAPITRE IV

Les probabilités quantiques.

Jusqu'à présent nous nous sommes attaché à la recherche des formes des amplitudes de probabilité, et à la manière dont il fallait décomposer la suite des processus conduisant d'un état initial donné $|m\rangle$ à un état final $|m'\rangle$.

Le problème est maintenant de chercher dans quelles conditions les amplitudes de probabilité nous conduisent à des formes de probabilités analogues à celles de la première partie.

Pour cela, il faut tenir compte d'une condition supplémentaire introduite par la quantification : la relation d'incertitude entre le temps et l'énergie :

$$(1,7) \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

qui traduit le fait que la mesure de l'énergie d'un système pendant un intervalle de temps Δt est affectée d'une imprécision de l'ordre de :

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Pour un système dont le temps de vie est de l'ordre de τ sa vie moyenne, l'imprécision sur la mesure de l'énergie sera donc de l'ordre de $\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$.

De cette imprécision découle le résultat suivant.

Si l'on connaît à un instant initial $t = 0$ l'état d'un système, l'énergie ne peut faire partie des paramètres indépendants décrivant l'état du système à un instant t .

L'état du système sera donc uniquement décrit par les autres paramètres indépendants et le temps.

Ainsi de deux choses l'une, ou bien on désire connaître l'état du système à un instant précis t connaissant son état à l'instant initial, et l'on est alors obligé de faire une sommation sur tous ses états d'énergie, ou bien on désire connaître le temps moyen passé dans chaque état d'énergie bien déterminé et l'on doit effectuer une sommation sur le temps variant de 0 à $+\infty$.

Autrement dit, l'une seulement des deux variables, temps ou énergie, peut être utilisée comme variable indépendante.

On verra cependant apparaître lors de la sommation sur les états d'énergie, une fonction qui assurera la conservation de l'énergie, de telle manière qu'à chaque instant l'énergie d'un système isolé soit très

voisine de l'énergie initiale, l'imprécision sur l'énergie étant de l'ordre de :

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar}{\tau}.$$

Utilisant pour décrire l'état du système à un instant donné, l'ensemble des états stationnaires décrivant le système en l'absence de perturbation, on peut se demander jusqu'à quel point ces états stationnaires représentent des états quasi stationnaires du système en évolution? Une des conditions doit être que le nombre d'oscillations pendant la vie moyenne du système dans chacun de ces états soit grand.

Désignons par $\nu \equiv \frac{E}{\hbar}$ la fréquence associée à l'énergie du système dans un état d'énergie E , on doit donc avoir :

$$\nu\tau \gg 1.$$

Si l'on associe cette condition à la relation d'incertitude sur l'énergie :

$$\Delta\nu, \tau \simeq 1.$$

Il faut que :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta E}{E} \ll 1$$

l'imprécision relative sur l'énergie d'un système dans un état quasi stationnaire doit être très petite.

Considérons maintenant un système isolé dans un état initial $|m_0\rangle \equiv |p_0\rangle$ ne contenant aucune particule du champ, défini par la fonction d'onde $\Psi_{p_0}(\vec{r})$ contenant les interactions dues aux échanges de particules du champ, c'est-à-dire tel que les fonctions de base décrivant le système dans un état ne contenant pas de particule du champ aient été choisies de manière à interdire les transitions conduisant d'un état $|m_0\rangle$ à un état différent $|m'_0\rangle$.

Les seules transitions possibles à partir de $|m_0\rangle$ sont des transitions avec émission de particules. Supposons maintenant que nous cherchions la probabilité pour que le système ait émis n particules à l'instant t . Tout un ensemble de processus peuvent conduire à une telle éventualité au cours du temps. Tout d'abord, on peut envisager le cas où les n particules sont émises simultanément, ou bien une particule émise suivie de $(n-1)$ simultanées, et toutes les possibilités de simultanéité entre les n particules, jusqu'à celles où toutes les particules sont émises à des instants différents.

A chacune de ces possibilités, correspond un groupement différent des termes donnant la probabilité à l'instant t de l'état $|m_n\rangle$. C'est la séparation de chacun de ces groupements que nous allons tenter ici.

Désignons par $\alpha(m_n, s)$ l'image de l'amplitude de probabilité de

l'état $|m_n\rangle$ à l'instant t . L'état $|m_n\rangle$ se compose du produit des états de chaque particule émise et de l'état du système matériel.

Lorsque l'un des états intermédiaires du système évoluant vers l'état $|m_n\rangle$ est le produit d'un état du système et de certains états des particules du champ figurant dans l'état final, cet état peut être observable si son énergie est suffisamment voisine de l'énergie initiale.

Nous avons vu que, d'une manière générale, l'image $\Pi(m_n, s)$ de la probabilité $P(m_n, t)$ de trouver le système dans un état $|m_n\rangle$ à l'instant t est donnée par l'intégrale :

$$(VII) \quad \Pi(m_n, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(m_n; \frac{s}{2} - i\varepsilon) \alpha(m_n; \frac{s}{2} - i\varepsilon)^* d\varepsilon$$

où l'on considère s comme une variable réelle.

Lorsque $t \rightarrow \infty$ la variable complexe s tend vers les pôles de l'intégrant situés sur l'axe imaginaire, ces pôles donnant les énergies propres, compte tenu des interactions d'échanges des particules du champ. Ainsi lorsque $t \rightarrow \infty$ $s \rightarrow -i\varepsilon_m$ où ε_m est l'énergie relative au pôle.

Mais alors si l'on remplace s par $\frac{s}{2} - i\varepsilon$, lorsque $t \rightarrow \infty$ $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_m$ tandis que $s \rightarrow 0$. Ainsi l'image asymptotique de $P(m, t)$ pour t suffisamment grand est obtenue en utilisant des petites valeurs de s et des valeurs de ε voisines des pôles des amplitudes images.

Traisons tout d'abord le cas de la décroissance de l'état initial. Le système se trouve dans un état $|p_0\rangle$, ne contenant aucune particule du champ à l'instant initial. La probabilité image de l'état $|p_0\rangle$ est donnée par :

$$(3,7) \quad \Pi(p_0, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(p_0, \frac{s}{2} - i\varepsilon) \alpha(p_0, \frac{s}{2} - i\varepsilon)^* d\varepsilon.$$

Les éléments non diagonaux de $U_0(s)$ disparaissent en utilisant pour base le système des fonctions propres contenant les interactions dues aux échanges de particules du champ. L'expression de $\alpha(p_0, s)$ se réduit alors à :

$$(4,7) \quad \alpha(p_0, s) = \frac{1}{s + iu_p(s)}$$

et :

$$(5,7) \quad \Pi(p_0, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2} \right]^2}$$

où l'on a posé :

$$(6,7) \quad u_p\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) = \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s) - \frac{i}{2} \lambda_{p_0}(\varepsilon, s).$$

ε_{p_0} et λ_{p_0} étant des fonctions réelles des variables ε et s . D'après la définition de l'énergie propre des états quasi stationnaires :

$$(7,7) \quad \varepsilon_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, 0) = \varepsilon_{p_0}.$$

L'intégrand possède donc, pour s petit, un maximum au voisinage de ε_{p_0} , et la majeure partie de l'intégrale provient de ce voisinage. Ce maximum est obtenu en annulant la dérivée du dénominateur et en cherchant la racine pour $s \rightarrow 0$ de :

$$[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)] \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{4} [s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)] \frac{\partial \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Lorsque $s \rightarrow 0$ $\frac{\partial \lambda(\varepsilon, s)}{\partial \varepsilon} \rightarrow 0$ la racine est donc obtenue pour $\varepsilon = \varepsilon_{p_0}$. Considérant $\lambda_{p_0}(\varepsilon, s)$ comme une fonction lentement variable dans ce voisinage on peut écrire approximativement pour s petit :

$$(8,7) \quad \Pi(p_0, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_{p_0})^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, +0)}{2} \right]^2}$$

soit :

$$(9,7) \quad \Pi(p_0, s) = \frac{1}{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, +0)}$$

où $\lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, +0)$ désigne la limite de $\lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, s)$ lorsque $s \rightarrow 0$ dans le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire. Si l'on interprète l'expression :

$$(10,7) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2} \right]^2} = \Pi_0(p_0, \varepsilon, s)$$

comme étant l'image de la densité de probabilité de trouver le système dans un état $|p_0\rangle$ possédant une énergie ε à l'instant t , on voit que la sommation sur toutes les énergies possibles du système dans l'état $|p_0\rangle$ fournit une probabilité asymptotique pour t suffisamment grand, en accord avec la théorie du « damping ».

Ainsi un état quasi stationnaire défini par une fonction propre $|p_0\rangle$ possède une répartition d'énergie ayant un maximum au voisinage d'une valeur ε_{p_0} : l'énergie propre de cet état. Cette répartition est une loi de Cauchy pour une énergie voisine de l'énergie propre ε_{p_0} .

Répartition des états d'énergie. — La probabilité pour qu'une mesure montre un système dans un état donné est proportionnelle au temps passé par le système dans cet état. Ce temps est obtenu en prenant la limite pour $s \rightarrow 0$ de la probabilité image de trouver le système dans cet état :

$$(11,7) \quad \tau(p_0) = \Pi(p_0, +0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, +0)]^2 + \left[\frac{\lambda_{p_0}(\varepsilon, +0)}{2} \right]^2}$$

ce qui permet d'interpréter la quantité :

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0} + 0)}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, +0)]^2 + \left[\frac{\lambda_{p_0}(\varepsilon, +0)}{2} \right]}$$

comme la densité de probabilité pour que le système possède une énergie ε lorsqu'il se trouve dans un état $|p_c\rangle$. On obtient une loi de Cauchy dans le voisinage de ε_{p_0} . Cette loi tend vers une fonction singulière δ lorsque $\lambda_{p_0} \rightarrow 0$, ainsi l'énergie d'un système dans un état stationnaire ne peut être que son énergie propre.

Émission d'une particule. — Le système se trouve dans un état $|p_0\rangle$ à l'instant initial, la probabilité image pour qu'il se trouve dans un état $|m_1\rangle = |p_1, k_1\rangle$ à l'instant t , c'est-à-dire pour qu'il ait créé une particule du champ dans un état $|k_1\rangle$ et soit simultanément passé d'un état $|p_0\rangle$ à un état $|p_1\rangle$ dans l'intervalle de temps $(0, t)$ est :

$$(12,7) \quad \Pi(m_1, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(m_1, \frac{s}{2} - i\varepsilon) \alpha(\bar{m}_1, \frac{s}{2} - i\varepsilon)^* d\varepsilon.$$

Choissant pour base les fonctions propres contenant les interactions dues aux échanges de particules du champ, on élimine les éléments non diagonaux de U_{0T} et l'amplitude se réduit à :

$$(13,7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha(m_1, s) &= \frac{1}{s + i} \langle m_1 | U_{0T} | m_1 \rangle \langle m_1 | U_{1T}(s) | p_0 \rangle \\ &\quad \frac{1}{is - \langle p_0 | U_{0T}(s) | p_0 \rangle} \end{aligned} \right.$$

Les états des particules du champ formant un spectre continu d'énergie :

$$\langle m_1 | U_{0T}(s) | m_1 \rangle = \langle p_1 | U_{0T}(s + i\nu_{k_1}) | p_1 \rangle + \nu_{k_1} = u_{p_1}(s + i\nu_{k_1}) + \nu_{k_1}$$

où ν_{k_1} désigne l'énergie de la particule du champ dans l'état $|k_1\rangle$. L'amplitude devient alors :

$$\alpha(m_1, s) = \frac{1}{s + i\nu_{k_1} + iu_{p_1}(s + i\nu_{k_1})} \langle m_1 | U_{1T}(s) | p_0 \rangle \frac{1}{is - u_{p_0}(s)}.$$

Séparant u_p en parties réelle et imaginaire et posant $\varepsilon_1 = \varepsilon - \nu_{k_1}$:

$$(14,7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi(p_1, q_{k_1}, p_0; s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon - \mu_0} \\ &\quad \frac{1}{[\varepsilon_1 - \varepsilon_{p_1}(\varepsilon_1, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_1}(\varepsilon_1, s)}{2} \right]^2} \cdot |\langle m_1 | U_{1T}\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) | p_0 \rangle|^2 \\ &\quad \rho(q_{k_1}, \varepsilon - \varepsilon_1) \frac{d\varepsilon_1}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2} \right]^2} \end{aligned} \right.$$

où μ_0 désigne l'énergie au repos de la particule émise et $\rho(q_{k_1}, \nu_{k_1})$ la densité des états au voisinage de l'état $|k_1\rangle = |q_{k_1}, \nu_{k_1}\rangle$.

On peut décomposer l'intégrant en trois parties : les deux parties :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_n}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_n}(\varepsilon, s)}{2} \right]^2} \quad (n = 0, 1)$$

sont les images des densités de probabilité $P_{p_0}(\varepsilon, t)$ et $P_{p_1}(\varepsilon, t)$ de trouver le système dans des états $|p_0\rangle$ et $|p_1\rangle$ d'énergie ε et ε_1 , à l'instant t , tandis que :

$$2\pi |< m_1 | U_{1T} \left(\frac{s}{2} - i\varepsilon \right) | p_0 \rangle|^2 \rho(q_k, \varepsilon - \varepsilon_1)$$

est l'image de la densité de probabilité $P_{p_0 p_1}(\varepsilon, \varepsilon_1; t)$ exprimant la création d'une particule d'énergie $\varepsilon - \varepsilon_1$, dans un intervalle de temps t , sachant que l'état initial $|p_0\rangle$ possède une énergie ε et l'état final $|p_1\rangle$ une énergie ε_1 . On voit que dans la succession des processus l'énergie est conservée, puisque l'énergie de la particule émise $\nu_{k_1} = \varepsilon - \varepsilon_1$ est la différence entre l'énergie initiale ε et l'énergie finale ε_1 du système. L'apparence de non-conservation provient du fait que les niveaux d'énergie quasi stationnaire étant définis par une distribution continue autour d'une valeur moyenne, l'énergie propre de cet état, une transition entre deux états $|p_0\rangle$ et $|p_1\rangle$ libère une énergie faisant partie d'un spectre continu ; c'est ce spectre d'énergie que l'on observe lorsque l'on étudie la distribution en énergie de la particule émise.

Suivant la décomposition et utilisant la correspondance (6, 2) :

$$(15, 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi(p_1, q_{k_1}, p_0; s) \subset P(p_1, q_{k_1}, p_0; t) = \int_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon_1=-\infty}^{\varepsilon-\mu_0} d\varepsilon d\varepsilon_1 \\ \left\{ \int_0^{t_1} P_{p_0}(\varepsilon, t_1) dt_1 \int_{t_1}^t P_{p_0 p_1}(\varepsilon, \varepsilon_1, t_2 - t_1) \cdot P_{p_1}(\varepsilon_1, t - t_2) dt_2 \right\} \end{array} \right\}$$

exprime une évolution où le système dans un état initial $|p_0\rangle$ d'énergie ε jusqu'à un instant t_1 , subit une perturbation qui l'oblige à un réarrangement d'une durée $t_2 - t_1$ accompagné de l'émission d'une particule dans un état q_{k_1} dont l'énergie est la différence entre les énergies initiale ε et finale ε_1 du système entre les instants t_2 et t .

En première approximation $P_{p_0 p_1}(\varepsilon, \varepsilon_1; t_2 - t_1)$ se réduit à une transition instantanée à l'instant t_1 , du fait que :

$$|< p_1 | H_+(k_1) | p_0 \rangle|^2 \quad \text{ou} \quad \nu_{k_1} = \varepsilon - \varepsilon_1$$

est le premier terme du développement de :

$$|< m_1 | U_{1T} \left(\frac{s}{2} - i\varepsilon \right) | p_0 \rangle|^2$$

et que l'original d'une constante est une fonction singulière δ portant sur le temps, multiplié par cette constante.

Distribution en énergie de la particule émise. — A la place des variables ε et ε_1 , on utilise les nouvelles variables x et δ définies par les relations :

$$(16,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = x - \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{p_1} \\ \varepsilon_1 = x + \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{p_0} \end{array} \right.$$

$\varepsilon - \varepsilon_1$ étant l'énergie ν_{k_1} emportée par la particule créée,

$$\delta = \nu_{k_1} - (\varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1})$$

représente l'écart, dû à la largeur des niveaux, entre l'énergie de la particule émise et la différence des énergies propres du système dans ses états initial et final.

Pour des petites valeurs de x et de δ , on peut confondre $\varepsilon_{p_n}(\varepsilon_n, s)$ avec ε_{p_n} ainsi que $\lambda_{p_n}(\varepsilon_n, s)$ avec $\lambda_{p_n}(\varepsilon_{p_n}, s)$ alors :

$$\Pi(p_1, q_{k_1}; p_0; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta=\varepsilon_{p_0}-\varepsilon_{p_1}}^{+\infty} \rho[q_{k_1}, \delta + (\varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1})] d\delta \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|< m_1 | U_{1T}(\frac{s}{2} - i(x + \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{p_0})) | p_0 >|^2 dx}{[(x - \frac{\delta}{2})^2 + (\frac{s + \lambda_{p_1}}{2})^2] [(x + \frac{\delta}{2})^2 + (\frac{s + \lambda_{p_0}}{2})^2]}.$$

Après intégration sur x , l'intégrand résiduel représente l'image de la densité de probabilité pour qu'une particule émise dans un intervalle de temps t et un état q_{k_1} possède une énergie :

$$\nu_{k_1} = \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1} + \delta.$$

La majeure partie de l'intégrale étant obtenue pour x et δ voisins de zéro, on peut écrire, appliquant un théorème de moyenne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = |< m_1 | U_{1T}(\frac{s}{2} - i(x_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{p_0})) | p_0 >|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{[(x - \frac{\delta}{2})^2 + (\frac{s + \lambda_{p_1}}{2})^2] [(x + \frac{\delta}{2})^2 + (\frac{s + \lambda_{p_0}}{2})^2]}$$

où x_0 est une quantité voisine de zéro, dépendant de δ , λ_{p_1} , λ_{p_0} . Le calcul de l'intégrale en y considérant les λ comme constants conduit à l'expression :

$$\Pi(p_1, q_{k_1}, p_0; s) = \int_{\varepsilon_{p_0}-\varepsilon_{p_1}}^{+\infty} \rho(q_{k_1}, \delta + \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1}) \cdot |< m_1 | U_{1T}[\frac{s}{2} - i(x_0 + \frac{\delta}{2} + \varepsilon_{p_0})] | p_0 >|^2 \cdot \frac{1}{(s + \lambda_{p_0})(s + \lambda_{p_1})} \cdot \frac{2s + \lambda_{p_0} + \lambda_{p_1}}{\delta^2 + (s + \frac{\lambda_{p_0} + \lambda_{p_1}}{2})^2} d\delta.$$

Négligeant la dépendance de ρ et U_{1T} par rapport à δ et faisant $s \rightarrow 0$, on retrouve comme répartition des énergies de la particule émise autour de la valeur $\varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1}$, une loi de Cauchy :

$$(17,7) \quad R(\delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_{p_0} + \lambda_{p_1}}{\delta^2 + \left(\frac{\lambda_{p_0} + \lambda_{p_1}}{2}\right)^2}$$

dont la largeur est égale à la somme des constantes de décroissance λ_{p_0} et λ_{p_1} .

Expression asymptotique. — Aux petites valeurs de s correspondent des valeurs de t grandes par rapport au temps de réarrangement du système. La plus grande partie de l'intégrale (14,7) est obtenue dans le voisinage des énergies propres ε_{p_1} et ε_{p_0} pour ε_1 et ε . L'expression asymptotique de la probabilité image est donc de la forme :

$$\Pi(p_1, q_{k_1}, p_0; s) = \frac{2\pi | \langle m_1 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_0}) | p_0 \rangle |^2 \rho(q_{k_1}, \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_1)}{[s + \lambda_{p_1}/\varepsilon_{p_1} + \alpha][s + \lambda_{p_0}/\varepsilon_{p_0} + \alpha]}$$

où la constante de croissance de l'état $|m_1\rangle$ à partir de l'état $|p_0\rangle$ a pour expression :

$$2\pi | \langle m_1 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_0}) | p_0 \rangle |^2 \rho(q_{k_1}, \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_{p_1}).$$

Émission de deux particules. — L'émission de deux particules peut avoir lieu successivement ou simultanément. Dans le premier cas, le système matériel subit une première transition $|p_0\rangle \rightarrow |p_1\rangle$ en émettant une particule dans un état $|k_1\rangle$, puis une seconde transition $|p_1\rangle \rightarrow |p_2\rangle$ accompagnée de l'émission d'une particule dans un état $|k_2\rangle$. Dans le second cas, le système passe de $|p_0\rangle$ à $|p_2\rangle$ avec émission simultanée de deux particules dans des états $|k_1\rangle$ et $|k_2\rangle$.

Étudions tout d'abord le premier cas. L'état intermédiaire $|m_1\rangle = |p_1, k_1\rangle$ étant observable doit avoir une énergie voisine de l'énergie initiale, le choix des états propres du système compte tenu de l'interaction d'échange des particules du champ élimine les éléments non diagonaux de U_{0T} et l'amplitude relative à une émission successive de deux particules se réduit à :

$$\begin{aligned} \alpha'(m_2, s) = & \frac{1}{s + i(\nu_{k_1} + \nu_{k_2}) + i \langle p_2 | U_{0T}^0[s + i(\nu_{k_1} + \nu_{k_2})] | p_2 \rangle} \\ & \cdot \sum_{|p_1\rangle} \langle m_2 | U_{1T}(s + i\nu_{k_1}) | m_1 \rangle \frac{1}{s + i\nu_{k_1} + i \langle p_1 | U_{0T}^0(s + i\nu_{k_1}) | p_1 \rangle} \\ & \cdot \langle m_1 | U_{1T}(s) | p_0 \rangle \frac{1}{s + i \langle p_0 | U_{0T}^0(s) | p_0 \rangle}. \end{aligned}$$

La probabilité image correspondant à ce terme fournit une contribution :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha'(m_2; \frac{s}{2} - i\varepsilon) \alpha'(m_2; \frac{s}{2} - i\varepsilon)^* d\varepsilon$$

où chaque α' du produit contient une sommation sur les états intermédiaires $|p_1\rangle$ du système matériel. Si l'on isole les termes relatifs aux états identiques du système dans chaque α' la sommation se dédouble en :

$$\sum_{|p_1\rangle} \sum_{|p'_1\rangle} = \sum_{|p_1\rangle} + \sum_{|p_1\rangle} \sum_{|p'_1\rangle \neq |p_1\rangle}$$

la première sommation conduit à une double densité de probabilité :

$$\Pi'(m_2; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[\varepsilon_2 - \varepsilon_{p_2}(\varepsilon_2, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_2}(\varepsilon_2, s)}{2} \right]^2} \cdot \sum_{|p_1\rangle} \frac{| \langle m_2 | U_{1T} \left(\frac{s}{2} - i\varepsilon \right) | p_1 \rangle |^2}{[\varepsilon_1 - \varepsilon_{p_1}(\varepsilon_1, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_1}(\varepsilon_1, s)}{2} \right]^2} \cdot \frac{| \langle m_1 | U_{1T} \left(\frac{s}{2} - i\varepsilon \right) | p_0 \rangle |^2}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2} \right]^2} d\varepsilon$$

où l'on a posé :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \nu_{k_1} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - \nu_{k_1} - \nu_{k_2}.$$

L'image de l'expression asymptotique est obtenue en faisant s petit. On peut alors se limiter au voisinage de la conservation de l'énergie. La sommation sur les états continus d'énergie des particules émises conduit à effectuer une sommation sur les variables continues ε_1 et ε_2 et à introduire la fonction ρ densité des états d'énergie de ces particules. On obtient alors :

$$\Pi'(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}; s) = \sum_{|p_1\rangle} \Pi(p_2, q_{k_2}; p_1, q_{k_1}; s)$$

où :

$$\Pi(p_2, q_{k_2}; p_1, q_{k_1}; s) = \frac{2\pi | \langle m_2 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_1}) | p_1 \rangle |^2 \rho(q_{k_2}, \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{p_1})}{s + \lambda_{p_2}(\varepsilon_{p_2}, +0)} \cdot \frac{2\pi | \langle m_1 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_0}) | p_0 \rangle |^2 \rho(q_{k_1}, \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_0})}{s + \lambda_{p_1}(\varepsilon_{p_1}, +0)} \cdot \frac{1}{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon_{p_0}, +0)}.$$

Les paramètres q caractérisent les états des particules émises.

On obtient une forme de probabilité traduisant l'émission successive de deux particules dans des états :

$$|k_1\rangle = |q_{k_1}, \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_0}\rangle \quad \text{et} \quad |k_2\rangle = |q_{k_2}, \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{p_1}\rangle,$$

les constantes de décroissance des états successifs du système matériel étant les quantités $\lambda_{p_i}(\varepsilon_{p_i}, +0)$ ($i = 0, 1, 2$) et les constantes de crois-

sance relatives aux transitions $|p_0\rangle \rightarrow |p_1\rangle$ et $|p_1\rangle \rightarrow |p_2\rangle$ étant respectivement :

$$2\pi \langle m_1 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_0}) | p_0 \rangle |^2 \rho(q_{k_1}, \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_0})$$

et :

$$2\pi \langle m_2 | U_{1T}(-i\varepsilon_{p_1}) | p_1 \rangle |^2 \rho(q_{k_2}, \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{p_1}).$$

L'émission simultanée des deux particules dans les états $|k_1\rangle$ et $|k_2\rangle$ est donnée par l'ensemble des termes restants.

Posant :

$$Q(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon; s)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \sum_{|p_1\rangle} \frac{\langle m_2 | U_{1T}\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon_1\right) | m_1 \rangle \langle m_1 | U_{1T}\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) | p_0 \rangle}{\varepsilon_1 - u_{p_1}\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon_1\right) - i\frac{s}{2}} \right. \\ &+ \langle m_2 | U_{2T}\left(\frac{s}{2} - i\varepsilon\right) | p_0 \rangle \left. \right\} \\ &\cdot \left\{ \sum_{|p'_1\rangle \neq |p_1\rangle} \frac{\langle m_2 | U_{1T}\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon_1\right) | m'_1 \rangle \langle m'_1 | U_{1T}\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon\right) | p_0 \rangle}{\varepsilon_1 - u_{p'_1}\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon_1\right) + i\frac{s}{2}} \right. \\ &+ \langle m_2 | U_{2T}\left(\frac{s}{2} + i\varepsilon\right) | p_0 \rangle \left. \right\} \end{aligned}$$

où l'on a remplacé v_{k_1} par $\varepsilon - \varepsilon_1$ et v_{k_2} par $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$; l'émission simultanée prend la forme :

$$\Pi(p_2, k_2, k_1, p_0; s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon; s)}{[\varepsilon_2 - \varepsilon_{p_2}(\varepsilon_2, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_2}(\varepsilon_2, s)}{2}\right]^2} \cdot \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2}\right]^2}.$$

Si l'on appelle $\rho(q_{k_2}, v_{k_2}; q_{k_1}, v_{k_1})$ la densité des états relative à l'ensemble des deux particules dans le voisinage des états $|k_1\rangle |k_2\rangle$, la probabilité pour l'émission simultanée des deux particules est donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{[\varepsilon - \varepsilon_{p_0}(\varepsilon, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_0}(\varepsilon, s)}{2}\right]^2} \\ &\cdot \int_{\varepsilon_1 = -\infty}^{\varepsilon_1 = \mu_0} d\varepsilon_1 \int_{\varepsilon_2 = -\infty}^{\varepsilon_2 = \mu_0} \frac{Q(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon; s) \rho(q_{k_2}, \varepsilon_1 - \varepsilon_2; q_{k_1}, \varepsilon - \varepsilon_1) d\varepsilon_2}{[\varepsilon_2 - \varepsilon_{p_2}(\varepsilon_2, s)]^2 + \left[\frac{s + \lambda_{p_2}(\varepsilon_2, s)}{2}\right]^2} \end{aligned}$$

où μ_0 est l'énergie au repos de chaque particule émise. Les valeurs de ε et ε_2 qui fournissent une contribution non négligeable à l'intégrale sont voisines respectivement des énergies propres ε_{p_0} et ε_{p_2} , le second membre se réduit donc pour s voisin de zéro à :

$$\Pi(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; s) = \frac{1}{[s + \lambda_{p_0} \varepsilon_{p_0} + 0][s + \lambda_{p_2} \varepsilon_{p_2} + 0]} \cdot 2\pi \int_{\varepsilon_{p_2} + \mu_0}^{\varepsilon_{p_0} - \mu_0} Q(p_2, q_{k_2}, q_{k_1}, p_0; \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_1, \varepsilon_{p_0} + 0) \rho(q_{k_1}, \varepsilon_1 - \varepsilon_{p_2}; q_{k_2}, \varepsilon_{p_0} - \varepsilon_1) d\varepsilon_1.$$

La quantité $2\pi Q\rho$ peut alors s'interpréter comme la constante de croissance de l'état $|p_2\rangle$ à partir de l'état $|p_0\rangle$ lorsqu'il y a émission simultanée de deux particules dans des états $|k_1\rangle = |q_{k_2}, \varepsilon_{p_0} - \varepsilon\rangle$ et $|k_2\rangle = |q_{k_2}, \varepsilon_1 - \varepsilon_{p_2}\rangle$. Cette quantité est une densité puisque les états d'énergie des particules émises forment un ensemble continu.

La constante de croissance de l'état $|p_2\rangle$ à partir de l'état $|p_0\rangle$ s'obtient en sommant sur toutes les possibilités des particules émises :

$$\lambda(p_2, p_0) = \sum_{|q_{k_1}\rangle, |q_{k_2}\rangle} 2\pi \int_{\varepsilon_{p_2} + \mu_0}^{\varepsilon_{p_0} - \mu_0} Q\rho d\varepsilon_1.$$

On obtient pour l'image de la probabilité une expression exprimant bien une croissance directe de l'état $|p_2\rangle$ à partir de l'état $|p_0\rangle$ par émission simultanée de deux particules.

CONCLUSION

La détermination des états quasi stationnaires montre que l'on doit associer à chaque fonction propre définissant un état une répartition d'énergie autour d'une valeur moyenne et non plus une énergie bien déterminée comme dans le cas des états stationnaires.

Ces états dépendent du temps par l'intermédiaire d'une fonction qui tend asymptotiquement vers une exponentielle possédant un argument complexe, lorsque $t \rightarrow \infty$. Cette quantité complexe provient du fait que l'échange des particules du champ entre les constituants du système matériel introduit automatiquement un potentiel complexe dont la partie imaginaire traduit la décroissance des états quasi stationnaires au cours du temps.

La forme des probabilités que l'on trouve s'identifie asymptotiquement pour t suffisamment grand, avec les expressions imposées par l'hypothèse de l'existence d'états quasi stationnaires, c'est-à-dire d'un ensemble de paramètres décrivant le système, constant pendant un certain intervalle de temps.

Le fait qu'un système ne puisse exister simultanément dans deux états différents est exprimé par l'existence d'un ensemble de fonctions propres orthonormées servant à les décrire.

On en arrive à la conclusion que la mécanique quantique permet bien de décrire l'évolution d'un système comme une suite de transitions entre états quasi stationnaires lorsque la vie moyenne de chaque état est suffisamment grande vis-à-vis du temps de réorganisation du système.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Sur les coefficients spécifiques d'ionisation.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 9 mars 1956.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.

